# ARITMETICĂ RECREATIVĂ

Pietrani

Vacanța de vară - iulie 2004

# Cuprins

# Capitolul 1 Despre numere

### 1. Ceva despre unele numere cunoscute

Pământul are o vârstă de peste 2.000.000.000 de ani, iar viața pe planeta noastră există de mai bine de 300.000.000 de ani. Pe planeta Mercur anul are 88 de zile pământeşti. Lumina înaintează cu o viteză de aproximativ 300.000 de km/sec, în timp ce viteza sunetului este de aproape 1.050 km/oră. Corpurile, în mişcarea lor, se freacă de aerul înconjurător şi ca urmare li se ridică temperatura cu 25° la o viteză de 1.050 km/oră. La o viteză de 2.100 km/oră această temperatură ajunge la 157°.

Iată numai câteva fenomene naturale astăzi cunoscute, care au fost descoperite şi cercetate de savanți. Şi multe, nesfârşit de multe alte fenomene naturale se mai petrec în jurul nostru după anumite legi fizice, chimice, biologice, sociologice etc. între diversele fenomene naturale există o serie de legături, unele bine cunoscute, altele în curs de cercetare şi multe încă nedescoperite.

Ce reprezintă însă cele câteva numere citate o dată cu fenomenele arătate? Şi, mai departe, ce reprezintă marea imensitate de alte numere pe care gândul nostru nici nu le poate măcar cuprinde?

Ştiința numerelor ne învață că ele constituie mijlocul prin care noi reuşim să exprimăm, în anumite unități de măsură, relațiile cantitative între mulțimea de fenomene care se petrec în natură sau între imensitatea de obiecte care ne înconjoară.

### 2. Când şi de ce a început omenirea să numere

S-ar putea crede că omul a ştiut să numere de când există. Pare să nu fie chiar aşa. Un lucru însă este adevărat: ştiința numerelor este foarte veche şi ea stă la baza matematicii. Fără matematică nici nu vedem cum s-ar fi putut dezvolta toate celelalte ramuri ale ştiinței şi tehnicii. Fără matematică nu ar fi putut progresa nici fizică şi nici chimia, nici astronomia şi nici geografia.

Cele mai vechi documente ştiințifice cunoscute ne dovedesc că într-o epocă destul de îndepărtată a existat la unele popoare - cum au fost sumerienii, egiptenii şi chinezii antici - un nivel relativ ridicat de cunoştințe matematice.

Astfel, de la sumerieni (locuitorii Babilonului antic) ne-a rămas un text de matematică scris acum 4.000 de ani pe 44 de tăblițe de argilă uscată. Pentru epoca în care a fost scris, acest text constituie o adevărată enciclopedie matematică.

Într-un muzeu din Moscova există un papirus numit chiar „Papirusul din Moscova" care a fost scris de egiptenii antici cu 19 secole î.e.n. Un altul, cunoscut sub numele de „Papirusul lui Rhind" sau „al lui Ahmes", a fost scris în urmă cu 37 de secole. Dar cuprinsul acestui papirus nu aparține nici lui Rhind şi nici lui Ahmes, deoarece englezul Rhind nu a fost decât proprietarul papirusului, iar egipteanul Ahmes nu a avut decât rolul unui scrib care a transcris lucrarea intitulată „Modul de calcul pentru a pătrunde lucrurile, a cunoaşte tot ce este obscur şi a învinge orice dificultate". Această lucrare a fost alcătuită de un autor necunoscut cu vreo 3

secole înainte de naşterea lui Ahmes. Egiptenii vechi aveau şi ei deci cunoştinţe foarte înaintate de matematică încă acum 4.000 de ani.

În vechile cronici chinezeşti şi hinduse se întâlnesc probleme care dovedesc că aceste popoare stăpîneau cunoştinţe profunde de matematică. Nivelul ridicat al cunoştinţelor matematice la greci apare de abia cu 500 de ani î.e.n. La acea epocă ei au preluat o ştiinţă avansată a numerelor de la babilonieni, egipteni, chinezi, hinduşi, fenicieni şi alte popoare mai vechi. Despre modul cum numărau oamenii înainte de descoperirea scrierii nu avem date precise. Se ştie numai că egiptenii efectuau recensăminte încă acum 6.000 de ani. Dar de când a început omul să numere şi până la inventarea modului celui mai rudimentar de însemnare în scris a rezultatului unei numărări, au trecut mii şi mii de ani.

Un lucru este sigur. Oamenii s-au folosit de numere din timpurile cele mai îndepărtate, şi anume cam de pe la sfârşitul perioadei comunei primitive. Oamenii care au trăit la începutul acestei perioade aproape că nu aveau de ce să numere. Felul lor de viaţă nu le punea probleme a căror rezolvare să ceară folosirea unor numere, şi cu atât mai puţin cunoaşterea noţiunii de număr.

După ce omul a trecut la viaţa de păstor şi agricultor, el a simţit nevoia să înceapă să numere. Dar el nu a început să numere din dorinţa de a şti câte stele sunt pe cer sau câte flori vede în jurul său. Numai necesitatea ţinerii unor socoteli ale animalelor, ale pieilor, ale rezervelor alimentare sau ale altor obiecte care intrau în posesia obştească sau privată, 1-a condus pe omul din epoca primitivă la găsirea unui mijloc de exprimare a cantităţilor şi mărimilor cu ajutorul numerelor.

Omul încă nu inventase scrisul, şi nici măcar însemnarea pe răboj, când a simţit nevoia de a cunoaşte lipsa unei vite din mica turmă pe care o conducea. Acest om nu ar fi putut să spună *câte* oi sau *câţi* reni are în grămada pe care o posedă şi nici *câte* fiare a întâlnit în calea lui, adică să efectueze o „numărare". Nevoia de a controla dacă în turmă a rămas numărul de oi sau de reni pe care i-a avut în ajun l-a împins la început pe om să deosebească numai o cantitate mai mică de una mai mare. Era un fel de numărare concretă legată de anumite obiecte fără a putea exprima cantitatea prin numere.

Apoi muncile agricole trebuiau efectuate în anumite perioade ale anului şi într-un anumit număr de zile. Omul învăţase să cunoască perioadele după succesiunea anotimpurilor, dar ca să ştie dacă timpul prielnic muncilor agricole a trecut sau nu, el trebuia să numere zilele.

Aşadar, nu matematicienii au fost descoperitorii numerelor, ci simpli păstori şi agricultori, adică aceia care au simţit cei dintâi nevoia să numere.

### *3. Cum a ajuns omul la ideea de număr*

Dacă nu dispunem de documente aşa de vechi care să corespundă epocii la care omenirea a început să numere, cum putem totuşi să aflăm ceva despre modul în care omul a ajuns la ideea de număr? Sunt motive să presupunem că până a ajunge la stadiul actual de civilizaţie, oamenii au trecut prin faze similare cu acelea în care se găsesc unele popoare primitive din Africa şi Oceania. Din studiul felului în care

numără aceste popoare, oamenii de ştiinţă au tras concluzii care ne dau o idee asupra modului cum omenirea a putut să ajungă la unele metode de numărare.

Omul primitiv nu cunoaşte noţiunea abstractă de număr, dar el poate să stabilească o corespondenţă între obiectele de numărat şi degetele sale. Corespondenţe se pot stabili şi între alte obiecte şi obiectele de numărat. Să presupunem, de exemplu, că avem o grămadă de mere şi un sac de nuci. Dacă de fiecare dată în care luăm un măr din grămadă scoatem şi o nucă din sac, putem spune că am stabilit o corespondenţă între numărul acestor nuci şi merele luate din grămadă. Adică am luat din grămadă atâtea mere, câte nuci am scos din sac.

Corespondenţa între obiectele de numărat şi degete s-a putut stabili pentru că numărul degetelor unei mâini este acelaşi la toţi oamenii. Numai din această cauză degetele mâinii au devenit o unitate de măsură pentru numărat. Numărarea la unii oameni primitivi nu se opreşte la degete. Dacă numărul obiectelor este mai mare decât zece ei merg mai departe la alte părţi ale corpului: la pumn, cot, subsoară, umăr, sân etc. încep cu: organele părţii stângi a corpului şi apoi trec la partea dreaptă. La urmă ei îşi amintesc la ce parte a corpului au ajuns cu numărarea.

Ordinea numărării îşi pierde deci importanţa, rămâne numai ideea de cantitate. Dar această idee rămâne mult timp legată de obiectele numărate. Oamenii primitivi nu pot vorbi decât de *obiecte* numărate. Ei nu concep a exprima „cinci" fără a spune „cinci copaci" sau „cinci oameni", „cinci cai" şi aşa mai departe. Numai cu timpul după ce au observat că toate obiectele enumerate în acelaşi fel au o proprietate nouă, comună tuturor grupurilor de „cinci" sau „şase", oamenii primitivi au ajuns la noţiunea abstractă de număr. Ei au putut constata atunci că noţiunea de „cinci", de exemplu, poate cuprinde în ea şi „cinci copaci" şi „cinci oameni" şi „cinci cai", adică atâtea alte noţiuni concrete. în felul acesta oamenii au trecut la o generalizare a denumirilor numerelor. Au început să numere: doi, trei, patru, cinci etc, fără să mai lege şi obiectele de numere. Este interesantă constatarea că denumirile primelor cinci numere au o origine comună la multe popoare, ceea ce înseamnă că aceste denumiri s-au născut probabil atunci când strămoşii oamenilor care alcătuiesc diferitele popoare făceau parte dintr-un singur trib.

### *4. Cel dintâi număr nu a fost numărul 1*

Se pare că primul număr folosit de omul primitiv nu a fost numărul 1, ci numărul 2. Numărul 1 singur este ceva abstract. El nu poate exista decât atunci când ai două sau mai multe elemente identice pe care să le numeri.

Până în Evul Mediu era răspândită ideea că „unu" nici nu reprezintă măcar un număr. Chiar şi vechii învăţaţi greci, care erau buni matematicieni, erau convinşi de acest lucru. Excluderea lui „unu" din familia numerelor venea de la faptul că oamenii, legau noţiunea, de număr de aceea de mărime, cantitate, multitudine.

Numărul 2 a apărut, atunci când organizarea muncii în societatea primitivă a cerut divizarea ei între două persoane care trăiau în comun, adică divizarea muncii între bărbat şi femeie. Denumirea de azi a numărului 2 de „număr cu soţ" sau a multiplilor lui 2 de „numere perechi", este cu siguranţă o reminiscenţă din acele vremuri în care 2 reprezenta bărbatul şi femeia sau „o pereche".

Rar se întâmpla ca în societatea primitivă să se folosească pentru o grupă de 3 unități un termen special. Ceea ce trecea peste 2 era denumit „mult” sau „foarte mult”. Deci 3 sau 4 putea fi mult, sau foarte mult, după interesul pe care îl reprezentau aceste numere în raport cu necesitățile omului primitiv.

Nevoile economice, în dezvoltare, ale omului din societatea primitivă l-au determinat să facă unele progrese în întrebuințarea numerelor. Atunci a reuşit să descopere posibilitatea de a combina numărul 1 cu numărul 2. Astfel, pentru 3 s-a întrebuințat „unu cu doi”, pentru 4 „doi cu doi”, iar pentru alte grupe de unități, alte combinații similare. Deci numărul 2 a devenit un fel de „bază de numărare”. De altfel, se ştie precis că chinezii au întrebuințat până acum 5.000 de ani sistemul de numărare cu baza 2 cunoscut în matematică sub numele de „numărare binară”. Denumirea de azi de „numere perechi” sau „numere pare” a multiplilor lui 2 nu poate fi decât o amintire a epocii când 2 constituia o bază de numărare la o anumită treaptă de dezvoltare a civilizației. Şi astăzi chinezii mai folosesc termenii de numere „feminine” şi „masculine” pentru a arăta numere „cu soț” şi „fără soț”.

***5. Cum mai numără unele popoare primitive***

Aproape toate popoarele care se află pe o treaptă de dezvoltare primitivă şi care sunt deci foarte puțin evoluate din punct de vedere social şi cultural, numără fie făcând diverse combinații între numerele 1 şi 2, fie servindu-se de degetele mâinilor şi ale picioarelor. Iată o serie de exemple:

O populație primitivă din Brazilia numără: un deget, o pereche de degete; tot ce trece peste doi este „mult” pentru aceşti oameni.

Indigenii din strâmtoarea Torres au pentru numerele unu şi doi denumirile de *urapun* şi *okosa.* Ei numără: 1 = *urapun, 2 = okosa,* 3 = *okosa urapun,* 4 = *okosa okosa,* 5 = *okosa okosa urapun,* 6 = *okosa okosa okosa.* Deci o numărare pe bază de doi în toată regula. Pentru aceşti oameni numere mai mari de 6 nu există. Tot ce trece de 6 este o „grămadă”.

La fel unele triburi primitive din Australia reuşesc să numere cu aceeaşi bază până la 10. Pentru numere mai mari ca 10 ei întrebuințează un singur cuvânt: „mult”.

Alte triburi primitive din Australia, care pot concepe şi numere mai mari ca 10, numără făcând combinații mai complicate. Au termene speciale pentru numerele unu, doi şi trei, apoi încep combinațiile:

4 = doi şi doi,
5 = jumătate din degetele mâinilor,
6 = jumătate din degetele mâinilor şi unu,
15 = cele două mâini şi jumătate din degetele picioarelor etc.

Populația Bakairi se serveşte tot de numerele unu şi doi pentru a număra până la 6. Ei însoțesc fiecare numărare cu ridicarea degetelor de la mâna stângă. Pentru numerele cuprinse între 6 şi 10 ridică pe rând degetele de la mâna dreaptă, strigând „mera”, ceea ce înseamnă „acela”. Ca să indice numere cuprinse între 10 şi 20 ei ating pe rând degetele picioarelor, iar pentru a arăta un număr mai mare ca 20 îşi trag părul din cap.

Populația Bugilai din Noua Guinee are câte un cuvânt distinct pentru o serie de numere. Aceste cuvinte provin din denumirile părților corpului pe care le ating atunci când exprimă numerele respective. Astfel:

1 = *tarangesa* (degetul mic de la mâna stângă),
2 = *metakina* (inelarul),
3 = *ghinghimila* (mijlociul),
4 = *topea* (arătătorul),
5 = *manda* (degetul gros),
6 = *gaben* (pumnul),
7 = *trankgimbe* (cotul),
8 =*podei* (umărul),
9 = *ugama* (sânul stâng),
10 = *dala* (sânul drept),

şi aşa mai departe până se ajunge la degetul cel mic al mâinii drepte, adică la numărul 31.

Aceasta ne dovedeşte că denumirile obiectelor concrete care au servit la început pentru stabilirea unor corespondențe între ele şi obiectele de numărat, devin cu timpul nume ale numerelor. De altfel, este ştiut că la multe popoare cuvântul „mână" sau „pumn" înseamnă „cinci". Iar la noi se mai spune şi astăzi „un pumn" de sare, pentru a arăta o cantitate redusă de sare sau „o mână de oameni", pentru a indica un număr mic de oameni.

Populațiile primitive din insulele Oceanului Indian şi unele populații din Malaezia nu au *numere cardinale* peste trei. Chiar dacă au termeni speciali pentru grupuri de unități mai mari ca trei, de la patru în sus ei numără astfel: al patrulea, al cincilea, al şaselea etc. Aceşti oameni au deci *numere ordinale* în loc de cardinale şi prin urmare, de la patru în sus ei nu *numără,* ci *enumără.*

### *6. Sisteme vechi şi noi de numărare*

Popoarele au inventat în cursul evoluției lor diverse sisteme de numărare după cum au folosit ca bază o grupă sau alta de numere, potrivit specificului lor şi momentului istoric în care s-au dezvoltat.

Babilonienii numărau în grupe de 60. Ei foloseau deci numărarea *sexagesimală.* Calculele cu asemenea numere se făceau aşa cum noi lucrăm astăzi cu numerele care reprezintă grade, minute şi secunde de arc de cerc. Ideea acestui fel de numărare le-a venit de la împărțirea anului în 360 de zile.

Dar locuitorii Babilonului antic foloseau şi o numerație în care grupa de bază era zece, adică numerația *zecimală.*

Egiptenii, la care matematica s-a dezvoltat independent de babilonieni, foloseau şi ei numerația zecimală.

Chinezii, după cum am văzut, au numărat multă vreme socotind cu grupe de 2. Utilizau numărarea numită *binară.*

Şi vechii greci foloseau numerația zecimală. Ei întrebuințau pentru unități termenul *monade;* zecile erau numite *decade,* pentru sute aveau termenul *hecadecade,* miile se numeau *chiliade,* şi apoi urma termenul *miriade,* pentru zeci de

mii. Mai departe ei nu mergeau pentru că nu aveau nevoie. A trebuit să vină celebrul Arhimede ca să le demonstreze că se poate merge şi mai departe cu numărarea.

Unele popoare din Africa Centrală şi Africa de Nord socotesc şi astăzi cu grupe de câte 12, adică numără cu „duzina". Aceasta este numărătoarea *duodecimală.* Numărătoarea duodecimală a fost întrebuinţată multă vreme de popoarele germane şi se mai foloseşte şi astăzi în unele ramuri comerciale în care mărfurile se livrează cu „duzina". Se numără: una, două,..., unsprezece duzini, iar douăsprezece duzini fac un „*gross*" (mare, în limba germană).

Până la instaurarea regimului sovietic, popoarele din nord-estul Siberiei, care nu cunoşteau nici măcar un alfabet ca să-şi traducă gândurile în scris, nu ştiau să numere decât până la 20. De altfel ce nevoie aveau aceşti oameni de numere mai mari? Nimeni nu vâna mai mult de 20 de foci sau 20 de morse, nimeni nu poseda mai mult de 20 de piei şi nici un păstor din tundră nu avea mai mult de 20 de reni. Pe ici, pe colo, răsărea însă câte un bogătaş care reuşea să strângă mai multe piei sau să-şi mărească numărul renilor din cireada. Dar şi atunci când renii dintr-o cireada atingeau un număr mai mare, se număra tot în grupe de câte 20.

În cartea sa „Alitet pleacă în munţi" scriitorul sovietic T.Semiuşkin, care a trăit mulţi ani în mijlocul vânătorilor şi păstorilor *Ciucci,* vorbind despre averea unui bogătaş, spune în coloritul local al graiului:

„Cirezile de reni ale lui Eceavto sunt uriaşe. Bogăţia lui nu se poate socoti. Pe unde trec cirezile lui, trei veri calde nu mai apucă să crească iarba. Renii sunt împărţiţi în zece cirezi: *în fiecare cireada sunt douăzeci înmulţit cu douăzeci şi încă o dată, şi încă o dată douăzeci înmulţit cu douăzeci".*

Deci o cireada a lui Eceavto avea 3 x 20 x 20 = 1200 de capete. Iar atunci când bogătaşul Eceavto face negoţ cu celălalt bogătaş, Alitet, el îi spune:

„Pentru douăzeci de toporaşe îţi dau reni de *zece ori câte douăzeci".*

Până la numărul 20, ciuccii numărau însă cu baza 5. Astfel numărul 16 se exprima în limba acestui popor *trei ori cinci şi unu.* Aproape toţi contemporanii noştri numără cu grupe de 10. Modul acesta de a număra a fost probabil primul întrebuinţat pe scara evoluţiei, atunci când omul a avut nevoie să precizeze numere mai mari ca 10. Oamenii au ajuns la numărarea pe grupe de 10 datorită faptului că întotdeauna ei s-au servit de degete ca *mijloc natural de numărare.* Numărarea pe degete s-a născut ca o necesitate şi a fost apoi adoptată şi perfecţionată de oameni pe măsură ce se iveau noi nevoi în evoluţia societăţii. în felul acesta 10 a devenit „baza numeraţiei zecimale".

Originea întrebuinţării numeraţiei zecimale trebuie căutată probabil la fenicieni, care au fost cei mai mari comercianţi cunoscuţi în Antichitate. Fenicienii, împinşi de nevoile comerţului lor, au trebuit să găsească metodele cele mai practice şi mai simple de exprimare a numerelor.

O altă bază de numărare, de pildă 12, ar fi poate mai comodă decât baza 10. Se ştie că numărul 12 se împarte exact prin 2, 3, 4 şi 6, adică prin mai multe numere decât 10. Dar avantajele care s-ar obţine printr-o schimbare a bazei actuale de numărare nu sunt suficiente pentru a renunţa la sistemul zecimal.

Vom vedea mai departe că se pot alcătui sisteme de numărare luând ca bază orice număr. Depinde cât de comodă considerăm o bază sau alta, după scopul urmărit atunci când o folosim. Oricare sistem de numărare poate să dea posibilitatea numărării la nesfârşit. Cu toate acestea, mii şi mii de ani oamenii au crezut că şirul natural al numerelor este limitat. Era stabilită credința fermă că numărarea se opreşte la un anumit număr limită. Acest număr nu era acelaşi în toate timpurile şi peste tot. Am văzut doar că şi astăzi există oameni primitivi care se opresc cu numărarea la 6, la 10 sau la 31. Tot astfel, în decursul istoriei, oamenii s-au oprit cu numărarea la 3, apoi la 5, la 7, 10, 12, 13, 100, 1.000 etc. Bineînțeles că o dată eu ivirea de noi nevoi s-au descoperit noi numere, precum şi mijloacele corespunzătoare de exprimare a lor.

Vechii egipteni, care multă vreme nu şi-au putut închipui un număr mai mare ca 100.000, au ajuns în perioada înfloririi comerțului lor să cunoască şi să folosească numere până la 10.000.000.

Învățații greci, care conduceau cele mai înalte şcoli matematice din lumea antică, nu au trecut multă vreme dincolo de miriadă, adică de 10.000. Nici nu aveau măcar un termen, o expresie, pentru numere mai mari. Marele învățat Arhimede, calculând numărul firicelelor de nisip care ar putea umple un glob cât Universul cunoscut pe vremea lui, a fost primul care a arătat că omul poate numi numere oricât de mari.

### *7. Despre Arhimede şi problema firelor de nisip*

Arhimede (287-212 î.e.n.) a fost cel mai mare fizician şi geometru al Antichității. A trăit la Siracuza, cetate care a rezistat mult timp atacului romanilor datorită genialelor invenții tehnice ale acestui mare savant. Arhimede a inventat scripetele mobil, roțile dințate şi multe alte mecanisme. El este descoperitorul celebrului principiu hidrostatic pe care se bazează plutirea corpurilor. A scris multe cărți de mecanică şi matematică, dar multe din ele s-au pierdut.

În cartea sa „Psamites", Arhimede şi-a pus problema să găsească un număr foarte mare care să fie accesibil inteligenței umane. Acest număr trebuia să fie mai mare decât numărul firicelelor de nisip ce ar umple tot Universul. El înțelegea prin Univers sfera sistemului solar cunoscut pe vremea lui, sau mai bine zis un glob cu centrul în Soare şi cu o rază egală cu distanța de la Soare până la planeta Saturn. Dat fiind mijloacele de scriere şi de exprimare a numerelor din vremea sa, problema nu părea chiar aşa de simplă.

Arhimede şi-a pus această problemă nu cu scopul de a găsi pur şi simplu un astfel de număr foarte mare. El voia, prin rezolvarea ei, să dovedească că există numere nemăsurat de mari, chiar dacă în timpul său nu se găseau expresiile necesare pentru denumirea unor numere uriaşe.

Marele învățat găsi că numărul grăunților de nisip care ar umple sfera imaginată de el ar fi $10^{63}$. Bineînțeles că el nu s-a folosit nici de zero şi nici de exponent, pentru că acestea nu se cunoşteau pe vremea lui. Dar cum să denumească un asemenea număr, când cel mai mare număr exprimat de contemporanii lui era miriada, adică 10.000 sau $10^4$? Aici interveni geniul lui Arhimede.

Arhimede numi numere de *prim ordin* pe acelea care sunt mai mici ca miriada de miriade, adică numerele până la $10^8$. Apoi, din numerele următoare până la $10^{16}$ formă grupa *numerelor secunde.* Pe urmă trecu la *numere terțe* până la $10^{24}$ şi aşa mai departe. Fiecare grupă a numit-o *octadă.* Opt octade le-a întrunit într-o *perioadă* şi formă astfel *perioada primă, perioada secundă* etc.

În felul acesta, servindu-se numai de cuvinte obişnuite în limba greacă, marele învățat reuşi să dea numere până la unitatea urmată de 800 de milioane de zero. Un astfel de număr se poate scrie în minimum 60 de ani, cu o viteză de o cifră pe secundă, şi lucrând 10 ore pe zi. Cu această problemă Arhimede arăta învățaților din timpul său un mijloc prin care se pot familiariza cu numere neobişnuit de mari până atunci şi le indică o cale de a găsi altele şi mai mari.

### *8. De câte cuvinte avem nevoie pentru a număra?*

În afară de cele câteva popoare primitive arătate, oamenii contemporani cu noi ştiu să numere până la nesfârşit. Dacă ar trebui să folosim câte o denumire aparte pentru fiecare număr nu s-ar putea găsi atâtea cuvinte câte ne-ar trebui ca să putem număra. Numărul cuvintelor compuse din sunetele alfabetelor uzuale s-ar epuiza mult înainte de a ajunge la un număr mai mare decât oricare număr am vrea să ni-l închipuim noi.

Fără să facă aceste socoteli (de altfel nici nu le cunoşteau), oamenii din cele mai vechi timpuri au găsit mijloace practice pentru exprimarea numerelor. Ei au rezolvat problema numărării socotind nu cu unități separate, ci cu grupe de unități.

Pentru fiecare grupă de unități au găsit un cuvânt separat: unu, doi, trei, patru, ..., zece, şi aşa mai departe până la un anumit număr. Apoi, adunând grupele, una cu alta, cum ar fi un-spre-zece, doi-spre-zece etc, sau multiplicându-le (de exemplu: treizeci, patruzeci etc), au obținut numere noi. În acest mod, cu ajutorul unei cantități reduse de cuvinte au izbutit să facă diferite numărări, necesare şi convenabile în activitatea lor zilnică.

Se poate uşor calcula de câte cuvinte, din orice limbă, are nevoie omul pentru denumirea tuturor numerelor care trebuie exprimate la numărarea până la un anumit număr.

Să luăm de exemplu limba română. La numărarea până la zece ne trebuie 10 cuvinte. De la unsprezece până la douăzeci, dacă excludem conjuncția *spre* (vorbim numai de numere), mai intervin încă 2 cuvinte noi: *paisprezece şi şaisprezece,* care şi ele s-au născut din compunerea şi deformarea unor cuvinte dintre primele zece. De la douăzeci şi unu până la o sută ne mai trebuie încă 2 cuvinte noi: *şaizeci şi sută.* La numărarea până la o mie apare un singur cuvânt nou: *mie.* Deci pentru a număra până la o mie avem nevoie, în limba română, de 15 cuvinte diferite pe care le compunem aşa cum ne cere sistemul nostru de numărare. Până la un milion vom avea nevoie de 16 cuvinte diferite, iar până la un miliard de 17 cuvinte diferite şi aşa mai departe, pentru fiecare clasă nouă, un cuvânt nou.

Prin urmare, pentru a-şi înlesni activitatea sa zilnică, omul a reuşit să adopte un astfel de sistem de numărare încât să poată denumi rezultatul numărării obiectelor care intervin în această activitate, cu un vocabular foarte redus.

# *Capitolul 2* Cum se scriau numerele odinioară şi cum se scriu acum

### *9. Zorile scrierii numerelor*

Reprezentarea numerelor cu ajutorul unor semne sau cifre, cum sunt cele folosite de noi, sau apropiat de cele pe care le cunoaştem şi le întrebuinţăm astăzi, sunt realizări ale oamenilor din timpurile mai recente. Altele au fost cifrele cunoscute în urmă cu 1.000 de ani, diferite de acestea au fost cifrele folosite acum 2.000 de ani şi foarte deosebite de cifrele noastre au fost semnele întrebuinţate de popoarele la care s-a dezvoltat o civilizaţie în urma cu 60 de secole.

Se pare, că omul primitiv a început să zgârie în piatră sau să cresteze în lemn primele numere atunci când trebuia să marcheze evenimente cereşti pe care nevoia îl îndemna să le fixeze. Erau evenimente legate de productivitatea şi fertilitatea pământului şi a vitelor. El reprezenta atunci fiecare număr printr-un semn rudimentar, format din una, două, trei sau cel mult patru liniuţe. De altfel, în acea epocă omul nici nu ştia să numere mai mult. Liniuţele imitau degetele cu care era obişnuit să indice puţinele numere pe care le folosea.

În cele mai vechi documente care s-au putut găsi, se vede că egiptenii foloseau pentru scrierea numerelor, în urmă cu 6.000 de ani, desene similare cu acelea cu care reprezentau orice gând al lor. Este scrisul cunoscut sub numele de *pictografie.* Ulterior, nevoia de a deosebi numerele de celelalte cuvinte i-a îndemnat să găsească caractere speciale pentru scrierea cifrelor. Astfel apar la egipteni, încă din sec. al XXXV-lea î.e.n., numere scrise cu hieroglife (scriere sfântă). Cu timpul, aceste hieroglife au evoluat ajungându-se la o simplificare a semnelor.

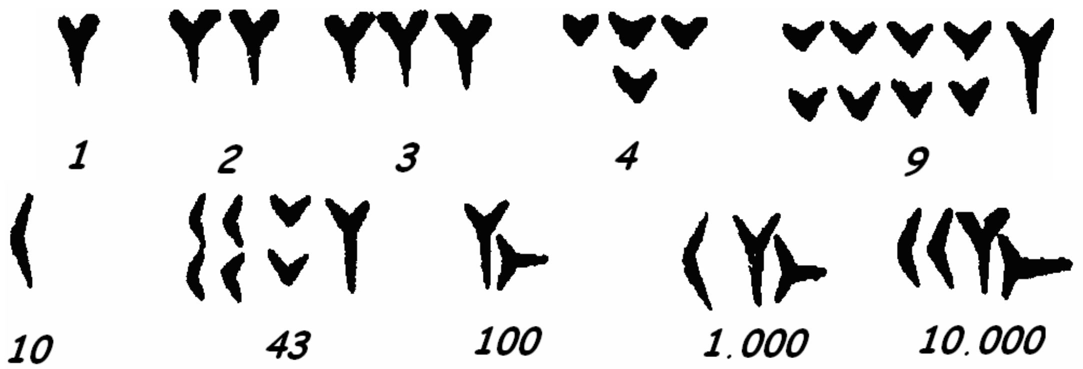

**Cum scriau vechii egipteni numerele:**
**(a) hieroglife vechi de 55 secole; (b) hieroglife simplificate; (c) scrierea hieratică (rapidă)**

Scrierea cu hieroglife era greoaie. Un număr se obţinea prin alăturarea succesivă a semnelor. Hieroglifele ne spun însă ceva bun. Din timpuri foarte îndepărtate egiptenii foloseau *numeraţia zecimală.*

O dată cu dezvoltarea economică şi propăşirea ştiinţei şi culturii, s-a simţit nevoia unei reprezentări mai simple a numerelor şi a unei scrieri mai rapide. S-a trecut astfel la scrierea hieratică (rapidă) a cifrelor. Unele semne trebuiau repetate mai puţin acum, dar prin aceasta egiptenii nu au reuşit încă să creeze un sistem de scriere a numerelor oricât de mari. Probabil că nici nu şi-au pus măcar problema continuării la nesfârşit a operaţiei de numărare.

Sumerienii şi-au pus însă această problemă şi au rezolvat-o parţial încă acum şaizeci de secole. Ei au introdus în scrierea numerelor un principiu, pe cât de simplu, pe atât de genial. Potrivit acestui principiu, orice cifră poate avea o valoare sau alta, după poziţia pe care o ocupă în scrierea unui număr format din două sau mai multe cifre. Este de fapt principiul pe care noi îl folosim în mod curent la scrierea numerelor.

Astfel, într-un număr oarecare scris de noi, de exemplu 85, observăm că cifra 5 reprezintă unităţi, deoarece ocupă, în numărul dat, prima poziţie de la dreapta, iar cifra 8 indică zecile pentru, că ocupă al doilea loc. Deci cifra 8, datorită poziţiei pe care o ocupă, are o valoare de zece ori mai mare decât aceea pe care o are când e singură. Dacă schimbăm cifrele între ele, obţinem numărul 58, care are cu totul altă valoare. Acest fel de a scrie numerele se numeşte *sistem de poziţii* şi ne dă posibilitatea să scriem practic numere oricât de mari sau oricât de mici am voi noi. Sumerienii, care foloseau numeraţia zecimală, aplicau şi sistemul poziţional, la exprimarea grafică a numerelor. Semnele scrisului lor aveau forma de cuie, de unde şi numele de *scriere cuneiformă.*




***Scrierea cuneiformă a numerelor***

Sistemul de poziţii, astfel cum îl aplicăm noi, a fost perfecţionat de popoarele indiene cu patru mii de ani mai târziu.

### *10. Cifre din litere*

Fenicienii şi vechii ebrei foloseau pentru scrierea lor curentă un alfabet format din 27 de caractere. Ei au găsit că este mai practic să utilizeze literele drept cifre. Primele nouă litere au devenit atunci unităţi, următoarele 9 au fost destinate zecilor, iar ultimele 9 litere au servit pentru reprezentarea sutelor. Două puncte aşezate peste o literă înmulţeau cu 100 numărul reprezentat de aceasta.

Litera care reprezenta, de exemplu, numărul 20 putea să devină 2.000 dacă avea două puncte deasupra ei.

Grecii antici foloseau la început o scriere complicată a numerelor cu liniuțe şi litere. Contactul comercial cu fenicienii şi ebreii i-a făcut să adopte, în sec. al VI-lea î.e.n., sistemul mai simplificat al acestor popoare. Pentru că ei nu aveau decât 24 de litere în alfabetul lor, grecii au recurs la trei caractere speciale. Literele-sunete se deosebeau de literele-cifre printr-un accent, iar un semn, aşezat la stânga jos făcea orice literă-cifră de o mie de ori mai mare. Astfel:

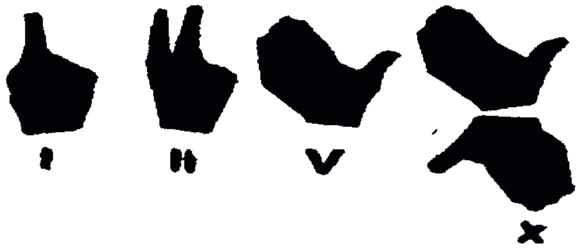
$$\theta'\rho'\chi'\gamma' = 9.123$$

Şi la vechile popoare slave găsim un sistem asemănător pentru scrierea numerelor. Un semn numit *„titlo"* aşezat deasupra unei litere o făcea să devină număr. Iată şi câteva exemple:

$$\begin{array}{cccccccc} \tilde{\Delta} & \tilde{B} & \tilde{\Gamma} & \tilde{I} & \tilde{K} & \tilde{M} & \tilde{P} & \tilde{\Pi} \\ 1 & 2 & 3 & 10 & 20 & 40 & 100 & 900 \end{array}$$

Cu cele 27 de litere ale alfabetului se puteau scrie astfel numere până la 999. Miile erau reprezentate de aceleaşi litere, la care se adăuga, la stânga jos, un semn special. Pentru numere mai mari se întrebuința un sistem original: se încadra litera respectivă cu un anumit desen. Acest sistem de scriere a numerelor a fost folosit şi la noi, atunci când s-au adoptat literele slave pentru scrierea în limba română.

Mai mult de zece secole *cifrele romane* au ocupat un loc important în scrierea numerelor. Cifrele romane îşi au originea în numărătoarea pe degete. Întregul sistem roman are doar şapte cifre distincte: **I**, **V**, **X**, **L**, **C**, **D** şi **M**. Acestea par a fi litere. Dar numai două din ele, **C** şi **M**, sunt litere. O parte din ele îşi au originea în numărarea pe degete.




Cifrele **I**, **II**, **III** reprezintă tot atâtea degete. **V** nu este decât o mână cu degetele întinse, iar **X** două mâini încrucişate. Litera **C** este inițiala cuvântului latin *centum* (o sută). Pentru că la început această literă se scria cu unghiuri drepte (**L**), jumătatea ei **L** s-a folosit pentru notarea numărului 50.

Litera **M** corespunde cuvântului latin *miile* (o mie). La început acest număr se scria cu un semn special: un cerc tăiat de un diametru vertical $\Phi$. Pentru 500 s-a adoptat atunci jumătatea din dreapta a acestui semn, adică **D**. Cu cifrele romane se pot scrie numere şi mai mari; folosind liniuțe aşezate în jurul cifrelor cunoscuse. Această convenție a intervenit destul de târziu.

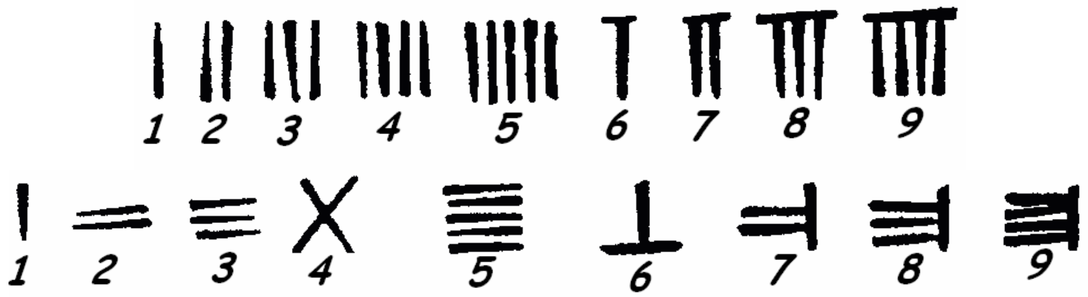
La forma definitivă a cifrelor romane s-a ajuns de abia în anul 140 î.e.n.

### 11. Cifrele capătă definitiv o valoare după formă şi una după loc

Închipuiţi-vă o operaţie aritmetică cu hieroglife, cu litere greceşti sau cu cifre romane. Pentru a înmulţi între ele două numere de câte patru-cinci cifre trebuiau învinse greutăţi enorme. Un copil de astăzi, din clasa a patra elementară, efectuează o asemenea operaţie într-un timp cel puţin de zece ori mai scurt, decât un calculator versat din antichitate. Şi aceasta numai pentru că un copil din vremurile noastre foloseşte un sistem de scriere a cifrelor foarte avansat. El întrebuinţează nouă semne diferite pentru cele nouă cifre de la 1 la 9, îl introduce pe zero unde îi lipsesc unităţile de un ordin oarecare şi se bazează pe principiul poziţional.

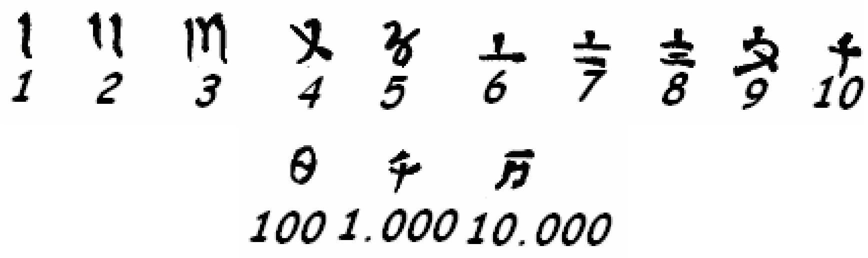
Pentru a putea face faţă nevoilor de calcul, la unele populaţii, cum erau triburile semite din Siria şi Palestina, s-a dezvoltat foarte mult calculul pe degete. Mai târziu, vechile popoare au inventat un instrument de calcul pe cât de simplu pe atât de ingenios, numit *abacus,* despre care vom vorbi mai departe. El era similar cu *sciotul* rusesc. Ce ne interesează însă acum, este să vedem cum s-a ajuns la sistemul actual de scriere a cifrelor, atât de avantajos.

Până acum vreo 600 de ani, chinezii se foloseau pentru calcule de nişte bastonaşe scurte, din bambus sau fildeş, pe care le dispuneau vertical sau orizontal. Originea acestui fel de reprezentare a numerelor trebuie căutată tot în numărarea pe degete. Bastonaşele nu erau decât o transpunere a degetelor în piese uşor manipulabile la calcul. Pentru simplificare cifra 4 se construia şi din două bastonaşe încrucişate.



***Cu bastonaşe de bambus sau de fildeş vechii chinezi formau cifre şi apoi numere***

Acest mod de figurare a cifrelor a fost utilizat apoi şi în scris. înfăţişarea cifrelor a suferit însă atunci când, pentru scrierea lor rapidă, s-a adoptat metoda de a se ridica cât mai puţin instrumentul de scris de pe pergament, pânză sau hârtie. Astfel s-au născut cifrele de mână chinezeşti. Aşadar la chinezi apar pentru prima oară semne distincte pentru fiecare cifră de la 1 până la 9. Mai există însă câte un semn special pentru 10, 100, 1.000 etc.




***Cifre chineze scrise de mână***

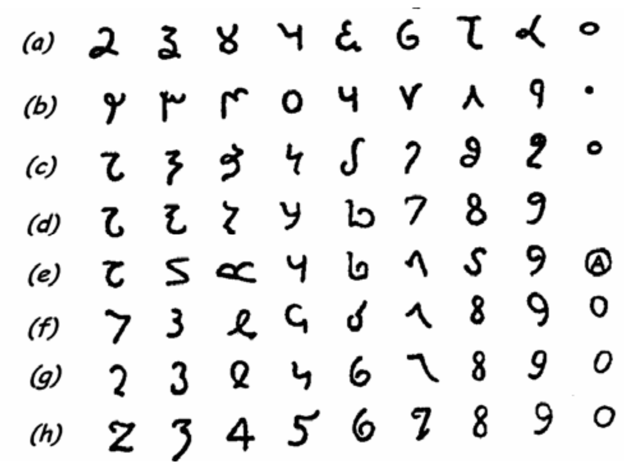
Dacă privim cu atenție aceste semne observăm că unele din ele se aseamănă mult cu cifrele noastre care sunt universale. Hinduşii au fost aceia care au reuşit să facă adevăratul salt calitativ în ceea ce priveşte numerația scrisă, în sec. III e.n., ei au adoptat numai zece semne distincte pentru scrierea numerelor. în acelaşi timp au perfecționat sistemul de poziții inventat de sumerieni. Al zecelea semn folosit de popoarele Indiei era un punct, care aşezat deasupra unei cifre, o făcea de zece ori mai mare.

Lipsa unui ordin oarecare era indicată printr-un gol între cifre. Mai târziu, prin sec. al VIII-lea e.n. hinduşii au introdus cifra zero, în forma pe care noi o cunoaştem astăzi, cu scopul de a multiplica de zece, o sută sau o mie de ori un număr, sau de a ține locul cifrei de un ordin oarecare, când aceasta lipseşte. Lărgirea şirului de numere naturale prin introducerea lui zero constituie cea mai importantă reformă pe care au introdus-o popoarele Indiei în numerația scrisă. Fără zero nici nu vedem cum am fi putut să ajungem la aşa o dezvoltare şi o simplificare a calculului aritmetic.

Numerația scrisă hindusă a fost preluată de arabi prin sec. al VIII-lea şi introdusă apoi în Europa sub denumirea de „sistem-arab”. Pentru aceasta arabii s-au folosit la început de cartea savantului uzbec Muhamed al Horezmi, intitulată „Aritmetica cu cifre hinduse”, scrisă prin secolul al IX-lea. După ce această carte a fost tradusă în limba latină - limba ştiințifică din Evul Mediu - savanții europeni au luat cunoştință de numerația zecimală pozițională. Traducerea începe cu cuvintele: „Al-Horezmi despre socoteala hindusă”. De aceea, la început aritmetica expusă cu sistemul hindus s-a numit *„al-horism”* şi apoi *„algorism”.* De la *algorism* s-a ajuns la termenul *algoritm,* care în prezent are cu totul alt înțeles în matematică *(algoritm* - succesiunea de calcule necesare pentru rezolvarea unui anumit gen de probleme. Astfel, toate operațiile necesare pentru rezolvarea unei ecuații de gradul I cu o singură necunoscută constituie un algoritm. Succesiunea de calcule necesare pentru extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr este tot un algoritm).

Deocamdată însă, noul sistem a rămas cunoscut numai de cercul strâmt al savanților. Comercianții europeni din sec. al XII-lea şi al XIII-lea care au învățat aritmetica în universitățile arabe, au putut şi ei constata superioritatea noului sistem față de cel roman.

Renumitul matematician Fibonacci nu a fost decât fiul unui comerciant italian, care fiind trimis de tatăl lui în interes de afaceri în Orient, a umblat şi pe la universitățile arabe. La întoarcerea sa în patrie a scris în anul 1202 celebra carte de aritmetică şi algebră „Liber abacei” care a ajutat la popularizarea în Europa a sistemului indo-arab.



Cifre arabe, induse şi europene:
(a) cifre hinduse;
(b) cifre arabe orientale;
(c) cifre arabe occidentale;
(d) cifre europene sec. X;
(e) cifre europene sec. XII;
(f) cifre europene sec. XIII;
(g) cifre europene sec.XV;
(h) cifre europene sec.XVI.

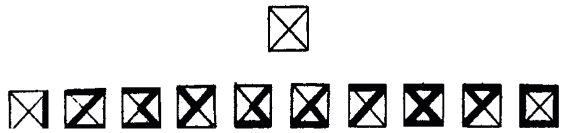
***Cifre hinduse, arabe şi europene***

Cifrele romane, singurele răspândite până atunci în Europa, nu dădeau nici o posibilitate de calcul. Ele erau bune doar pentru însemnarea numerelor sau a rezultatului unui calcul făcut prin abace sau diverse alte metode greoaie. Totuşi la introducerea sistemului indo-arab s-a întâmpinat multă rezistenţă. Biserica catolică considera folosirea cifrelor „arabe" drept o erezie, iar autorităţile feudale dădeau edicte speciale pentru interzicerea folosirii noului sistem.

Sistemul de numărare indo-arab s-a introdus definitiv în Europa de abia în sec. al XVI-lea, o dată cu slăbirea puterii feudale şi întărirea burgheziei. Burghezia din vremea aceea era interesată în propăşirea ştiinţei. Cifrele folosite de noi astăzi diferă, în parte, ca formă, de cele hinduse sau arabe. Ele au suferit diverse modificări atât datorită influenţei unor cifre existente în unele regiuni cât şi fanteziei scribilor şi „caligrafilor" care copiau textele. Definitivarea şi unificarea formei cifrelor s-a făcut, ca şi în cazul literelor, o dată cu răspândirea tiparului.

Acesta este adevărul ştiinţific. Dar mai circulă şi legende asupra formării cifrelor „arabe". Una care a „prins" este următoarea:

Cifrele pe care noi le numim „arabe" ar fi fost inventate de regele Solomon al ebreilor, care ar fi avut o piatră preţioasă tăiată ca în figură. Din liniile acestei pietre s-ar fi format cifrele pe care noi le folosim astăzi.



***Piatra preţioasă a regelui Solomon şi cifrele arabe derivate din ea... după legendă***

Această ipoteză, pe cât este de interesantă ca fantezie de desen, pe atât este de naivă şi lipsită de bază ştiinţifică.

### *12. Ceva despre „nimic"*

La început a fost chiar *nimic,* deoarece hinduşii indicau printr-un gol lipsa unui ordin oarecare dintr-un număr. Apoi au trecut la un punct, după aceea la un pătrat mic, pentru ca la urmă să adopte un cerculeţ care se poate scrie foarte simplu. Pentru că hinduşii întrebuinţau cuvântul *„sunia",* care înseamnă „gol", atunci când

aveau de indicat o astfel de lipsă în cuprinsul unui număr, arabii au tradus acest cuvânt în termenul corespunzător din limba lor. în arabă „gol" se traduce prin *„ţifr".*

De aceea, când s-a introdus sistemul indo-arab care, faţă de modul cunoscut de scriere a numerelor, se caracteriza prin prezenţa lui „zero", s-a luat obiceiul de a se numi numerele scrise după acest sistem, „numere cu ţifre". Cuvântul ţifră sau cifră a devenit apoi comun în limba multor popoare, încât astăzi orice semn folosit pentru scrierea unui număr este numit cifră. Când spunem câteodată „nulă" în loc de zero, nu facem decât să pronunţăm cuvântul italienesc „nulla", care înseamnă tot „nimic".

Şi această nulă, acest nimic, are rolul cel mai important în actuala numeraţie scrisă pe care noi o considerăm cea mai perfectă. Deşi este „nimic", această cifră apare ca un ins care spune: „Eu nu sunt nimic, însă atunci când sunt introdus între cifre, pot să ţin locul oricărei din ele şi în acelaşi timp să le fac pe toate care se află în stânga mea de zece ori mai mari. Când sunt aşezat o dată la dreapta unui număr îl fac şi pe acesta de zece ori mai mare, iar când sunt aşezat de mai multe ori îl măresc de o sută, o mie, zece mii de ori...".

Numărul zero nu aparţine şirului natural de numere, deoarece cu el nu se numără. însă în şirul natural de numere fiecare număr este format din precedentul, la care se adaugă o unitate sau din următorul, din care se scade o unitate. Astfel avem: 17 = 18 - 1, 16 = 17 - 1, ...,3 = 4 - 1, 2 = 3 - 1, 1 = 2 - 1.

Dacă continuăm, putem spune că 0 = 1 - 1. Deci, în şirul natural vom putea scrie pe zero imediat înaintea unităţii. Se spune atunci că am *extins* şirul natural de numere. Numărul zero mai are şi alte particularităţi. El este un număr par, deoarece se poate obţine prin scăderea lui 2 dintr-un număr care este tot par. Şi totuşi este singurul număr par care nu se poate divide prin 2...

Zero ca număr nu se adună, nu se scade. Când se înmulţeşte un număr oarecare cu zero, acest număr devine tot zero. Totuşi zero este un *operator,* deoarece adăugat la dreapta unui număr îl înmulţeşte pe acesta cu 10.

Mărimea 0 nu are proprietatea fracţionării, adică nu se poate împărţi aşa cum se împarte orice mărime reprezentată printr-un alt număr. Zero împărţit printr-un număr oarecare, afară de zero, dă tot zero.

Mai este ceva interesant la acest număr 0. Încercaţi să înmulţiţi un număr oarecare, de exemplu 7, de zero ori cu el însuşi. Veţi spune că este o absurditate. Totuşi $7^0$ ca şi $8^0$ sau $5^0$ sau în fine, orice număr ridicat la puterea 0 este egal cu 1. Cu toate că, la prima vedere, se pare că un număr la puterea 0 nu are nici un sens şi cu atât mai mult să fie egal cu 1, adică cu un număr natural, totuşi s-a admis acest lucru pentru că altfel nu se pot menţine toate regulile stabilite în aritmetică cu privire la calculele cu exponenţi.

### *13. Cum scriem un număr în sistemul nostru şi în alte sisteme de numărare*

Aşadar, noi numărăm unu, doi, trei... opt, nouă, zece. Când am ajuns la zece, facem un pachet din aceste numere şi începem iar să numărăm de la unu. Dar ca să nu uităm că avem în urma noastră pachetul de zece, spunem: unsprezece, doisprezece şi aşa mai departe. Când am mai numărat zece facem un nou pachet şi spunem douăzeci.

Trecem apoi la treizeci, patruzeci etc. Când am făcut zece pachete de câte zece, spunem că am ajuns la o sută. Dacă facem acum pachete mai mari, de câte zece zeci, adică de câte o sută şi strângem la un loc zece dintr-acestea, spunem că am ajuns la o mie. în felul acesta noi am învăţat şi ştim să număram la nesfârşit, tot făcând pachete de mii, de zeci de mii, de sute de mii şi apoi facem un pachet din zece sute de mii, adică un milion etc.

Pentru că în felul nostru de a număra noi ne tot bazăm pe pachete sau grupe de câte zece pe care apoi le înmulţim cu zece, iar rezultatul căpătat din nou cu zece şi aşa mai departe, sistemul nostru de numărare s-a numit *sistemul zecimal,* iar numărul zece l-am numit *baza numeraţiei zecimale.*

Pentru scrierea numerelor până la zece, noi folosim nouă caractere distincte, adică cifrele de la 1 la 9. Când ajungem la zece, adăugăm un zero la unu, pentru că noi am făcut o convenţie că zero la dreapta unui număr îl face de zece ori mai mare. Deci noi scriem 10. La fel scriem 20, 30, 40,..., 100, 1.000 etc. Când scriem numărul 406, noi introducem un zero între 4 şi 6 pentru că ne lipsesc zecile. Aceasta o facem tot pe baza unei convenţii. Dar nu întotdeauna s-au folosit oamenii de zero, de acest „nimic", pentru a-şi simplifica scrisul numerelor. Am văzut doar că destul de târziu s-a ajuns la această invenţie genială.

Am arătat că mai există şi alte sisteme de numărare în afară de acela cu baza zece. Cunoscând sistemul aşa de perfecţionat al numeraţiei scrise cu baza zece, să căutăm să-l generalizăm şi la celelalte sisteme de numărare. Nu este neapărat nevoie să ne alegem sistemul cu baza de 60, 12, 5 sau 2, care au fost sau mai sunt încă în uz la diverse popoare. Baza noastră poate fi orice număr. Conducându-ne după modul cum ne-am construit sistemul zecimal, putem spune că: pentru a scrie numerele în baza zece ne trebuie 9 cifre semnificative, adică mai puţin cu unu decât baza; dacă notăm orice bază cu B, vom spune că pentru a scrie un număr în baza B, trebuie să adoptăm (B - 1) caractere distincte pentru a reprezenta primele (B - 1) numere.

Am văzut că, în numeraţia zecimală, de câte ori ne lipseşte un ordin oarecare noi îl înlocuim cu un zero. Şi la numerele pe care le vom scrie în baza B îl vom folosi pe zero în acelaşi scop. Cunoscând toate acestea, să spunem ceva despre *numărarea* binară, despre care ştim că au mai întrebuinţat-o chinezii cu multe mii de ani în urmă, după unii chiar acum 5000 de ani, şi care a devenit din nou foarte actuală o dată cu inventarea şi punerea în funcţiune a calculatoarelor.

### *14. Numărarea binară*

Este numărarea cu baza 2. Pentru că suntem obişnuiţi cu numărarea zecimală, numărarea binară prezintă pentru noi o serie de curiozităţi. Cele (B - 1) caractere care se folosesc pentru primele (B - 1) numere se reduc la 2 - 1 = 1 caracter. Deci numărarea binară conţine ca cifră distinctă pe 1. Pentru a arăta lipsa unui ordin, atunci când se scrie un număr în numărarea binară se întrebuinţează tot simbolul 0 ca şi în numărarea zecimală.

Deci, în sistemul binar alte cifre decât 0 şi 1 nu se vor întrebuinţa, iar un număr scris în acest sistem apare în forma 1, 10, 11, 101, 110,111,1000 şi aşa mai departe.

### *15. Cum se scrie un număr în sistemul binar?*

În orice sistem de numărare, fiecare cifră a unui număr reprezintă baza la o anumită putere, înmulțită cu acea cifră. Puterile bazei pornesc de la 0 şi cresc de la dreapta spre stânga numărului. De exemplu, la numărul 3.047 în baza zecimală:

7 reprezintă pe 7 $= 7 \times 1 = 7 \times 10^0$
4 reprezintă pe 40 $= 4 \times 10 = 4 \times 10^1$
0 reprezintă pe 0 sute $= 0 \times 100 = 0 \times 10^2$
3 reprezintă pe 3 000 $= 3 \times 1000 = 3 \times 10^3$.

Deci se poate spune că un număr este format dintr-o sumă de produse, fiecare produs fiind şi el format dintr-o cifră a numărului înmulțită cu baza la o anumită putere. Pentru a scrie un număr în sistemul binar vom proceda în felul următor:

- vom descompune numărul într-o sumă de termeni, fiecare din aceşti termeni fiind format de 1, singura cifră semnificativă a sistemului binar, multiplicat cu 2 la o putere, 2 fiind baza;
- vom ordona termenii sumei după puterile descrescătoare ale lui 2, de la stânga la dreapta;
- pentru fiecare termen astfel obținut vom scrie cifra 1, iar pentru puterile lui 2 care lipsesc din şir vom scrie cifra 0.

De exemplu, să scriem în sistemul binar pe 61 din sistemul zecimal. Vom avea:
$61 = 1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ sau $61 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 0 \times 2^1 + 2^0$

În locul fiecărui termen vom scrie cifra 1, afară de penultimul ($0 \times 2^1$), care va fi înlocuit cu 0. Deci, vom avea $(61)_{10} = (111101)_2$, adică 61 din sistemul zecimal se scrie 111101 în sistemul binar. Sistemul binar cere foarte multe cifre pentru reprezentarea unui număr. Miile, care se scriu în sistemul zecimal cu 4 cifre, cer în sistemul binar 11 cifre. Primele 40 de numere scrise în sistemul binar sunt:

| *Sistemul* | | *Sistemul* | | *Sistemul* | | *Sistemul* | | *Sistemul* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***zecimal*** | ***binar*** | ***zecimal*** | ***binar*** | ***zecimal*** | ***binar*** | ***zecimal*** | ***binar*** | ***zecimal*** | ***binar*** |
| 1 | 1 | 9 | 1001 | 17 | 10001 | 25 | 11001 | 33 | 100001 |
| 2 | 10 | 10 | 1010 | 18 | 10010 | 26 | 11010 | 34 | 100010 |
| 3 | 11 | 11 | 1011 | 19 | 10011 | 27 | 11011 | 35 | 100011 |
| 4 | 100 | 12 | 1100 | 20 | 10100 | 28 | 11100 | 36 | 100100 |
| 5 | 101 | 13 | 1101 | 21 | 10101 | 29 | 11101 | 37 | 100101 |
| 6 | 110 | 14 | 1110 | 22 | 10110 | 30 | 11110 | 38 | 100110 |
| 7 | 111 | 15 | 1111 | 23 | 10111 | 31 | 11111 | 39 | 100111 |
| 8 | 1000 | 16 | 10000 | 24 | 11000 | 32 | 100000 | 40 | 101000 |

### *16. Maşinile electronice de calcul numără cu baza 2*

Cu toții am auzit despre alfabetul Morse. Ştim că acest alfabet are numai două semne: linie şi punct. Cu ajutorul lor se poate scrie orice cuvânt şi orice număr. Tocmai pentru că are numai două semne, acest alfabet este cel mai nimerit pentru a fi folosit în telegrafie. Un punct este un impuls electric scurt, iar o linie unul mai lung. Deci în total două semnale electrice foarte uşor de obținut printr-o apăsare mai scurtă sau mai lungă pe buton. Aplicarea sistemului binar la transmiterea

electrică a numerelor este şi mai simplă. Orice număr fiind format numai din unități şi zerouri, el poate fi reprezentat prin prezența semnalului electric pentru unu şi absența semnalului electric pentru zero.

Acest sistem se aplică la înregistrarea numerelor în maşina electronică de calculat. Operatorul introduce în maşină numerele, scrise în sistemul zecimal. Printr-un dispozitiv automat maşina le „traduce” în sistemul binar şi totodată le imprimă pe o bandă care înaintează cu o mişcare uniformă. Imprimarea se face sub forma unor mici orificii în bandă. Unde cade unitatea se produce o gaură, iar acolo unde vine un zero, rămâne un spațiu. Astfel, numărul 37, care în sistemul binar se scrie sub forma 100101, apare pe bandă: orificiu, gol, gol, orificiu, gol, orificiu. Fotoelementele maşinii de calculat „citesc” numerele de pe această bandă foarte uşor. Când în fața unei celule fotoelectrice trece un orificiu al bandei se produce un impuls electric, iar atunci când apare un gol impulsul se întrerupe pentru un timp egal.

Maşina „memorează” aceste impulsuri electrice cu dispozitivele ei alcătuite din mii şi mii de piese radio-tehnice: lămpi electronice, fotoelemente, rezistențe, semiconductori etc. De aici încolo începe calculul propriu-zis cu ajutorul dispozitivului aritmetic format şi el dintr-un mare număr de elemente electronice. Totul funcționează cu o viteză uimitoare. Astfel maşina electronică americană „Ordinator” efectuează între 42.000 şi 50.000 de operații într-o secundă.

Iată deci cum un sistem de numărare, pe care populațiile primitive l-au inventat şi folosit, şi care ulterior a fost teoretizat de mintea omului cult, este astăzi din nou folosit în scopuri practice cu ajutorul celei mai moderne maşini.

# *Capitolul 3* Ceva din istoria calculului numeric

### *17. Mâna, primul instrument pentru calcul*

Primele semne zgâriate de omul primitiv, undeva pe un colț de stâncă, pe un os sau pe un răboj nu i-au folosit decât pentru a fixa, fie datele unor evenimente mai importante, fie numărul vitelor şi al obiectelor utile din averea personală sau colectivă. Aceste semne nu au putut fi întrebuințate niciodată pentru calcule şi de altfel inventatorii lor nici nu s-au gândit vreodată la aşa ceva. Chiar şi după aceea, atunci când oamenii au inventat simboluri mai practice pentru fixarea numerelor, ei nu au avut de unde să ştie că acestea vor trebui să servească vreodată ca mijloace de calcul simplu şi rapid. Era deci natural, ca mult mai târziu, când s-a ivit nevoia efectuării unor calcule simple, rudimentare, omul să descopere că degetele mâinii sale, care îi serveau continuu pentru numărat, sunt bune şi pentru socotit. Mâna a devenit deci un fel de instrument de calculat.

Mâna ca prim instrument de calcul a dăinuit după aceea mii de ani, pentru că nici numerele formate din litere, cum erau cele greceşti şi nici chiar numerele scrise din cifre romane nu ofereau posibilitatea unui calcul rapid şi simplu. Numai cu ajutorul numerelor scrise după sistemul inventat de populațiile din India s-a putut găsi o tehnică de calcul care să ducă la rezultate corecte, prin mijloacele cele mai simple şi cu o viteză corespunzătoare nevoilor.

Bineînțeles că înaintea descoperirii primelor calcule numerice cu ajutorul semnelor inventate de ei, indienii se serveau şi ei de mână ca instrument de calcul. Populația din Bengal mai calculează şi astăzi pe degete.

### *18. Calculul pe degete al bengalezilor*

La fel ca strămoşii lor, bengalezii se folosesc de faptul că fiecare deget, afară de cel gros, are trei încheieturi şi un vârf, deci patru puncte distincte. Acest lucru le permite să numere până la 16 numai cu patru degete ale unei singure mâini, pornind de la prima încheietură a degetului mic şi trecând succesiv la celelalte degete.

Prin exerciții repetate ei ajung să îndoaie degetul gros în aşa fel încât să atingă cu vârful său orice încheietură a degetelor mâinii respective, iar fiecare atingere de acest fel înseamnă pentru ei un număr. Astfel, ei ştiu precis că a treia încheietură de la bază a degetului mijlociu reprezintă numărul 11 sau că baza inelarului este 5 şi aşa mai departe. în felul acesta, servindu-se de ambele mâini, aceşti oameni pot face uşor adunări şi scăderi de numere până la 31 şi înmulțiri până la 8 x 4 inclusiv.

### *19. Înmulțirea pe degete la triburile semite din Siria şi Palestina*

Oamenii din aceste triburi cunoşteau tabla înmulțirii, însă numai până la 5 x 5 şi ştiau s-o întrebuințeze mecanic aşa cum ştim noi să ne folosim de tabla înmulțirii până la 10 x 10, înmulțirea unui număr mai mic decât 5 cu un număr cuprins între 5 şi 10, se făcea descompunând pe ultimul într-o sumă de două numere dintre care unul

era neapărat 5, iar al doilea un număr până la 5. După ce se opera înmulțirea ambilor termeni ai acestei sume cu primul număr dat, se adunau rezultatele. Dacă însă ambii factori ai înmulțirii erau cuprinşi între 5 şi 10, se serveau de degetele mâinilor ca de o maşină de calculat, astfel: fiecare deget întins, al unei mâini era socotit drept o unitate; deci mâna deschisă, cu degetele întinse, reprezenta numărul 5; îndoind un deget, două, trei sau patru, începând cu cel mic se obțineau numerele 6, 7, 8 sau 9; pumnul închis era socotit 10.

Fiecare factor al înmulțirii era reprezentat de câte o mână cu degetele dispuse conform regulilor de mai sus, după mărimea numărului. La citirea rezultatului înmulțirii, degetele îndoite deveneau zeci, iar cele întinse rămâneau unități. în acest fel, înmulțirea se reducea la următoarele trei operații simple care erau executate în ordinea înşirării lor:

- adunarea degetelor îndoite, socotite ca zeci;
- înmulțirea degetelor întinse, socotite ca unități;
- adunarea rezultatelor de mai sus.

Un exemplu ne va lămuri imediat. Să presupunem că aceşti oameni au avut de făcut înmulțirea: 6 x 8 = 48. Numărul 6 se reprezintă printr-un deget îndoit şi patru degete întinse de la o mână, iar numărul 8 prin trei degete îndoite şi două degete întinse de la cealaltă mână. Vom avea deci:

| | | |
|---|---|---|
| 1 + 3 | degete îndoite | 40 |
| 4 x 2 | degete întinse | 8 |
| | Total | 48 |

Cum se explică acest sistem de înmulțire? Să numim cu $a$ şi $b$ numărul degetelor îndoite de la fiecare mână.

Atunci cei doi factori ai înmulțirii devin: 6 = (5 + $a$) şi 8 = (5 + $b$), iar numărul degetelor întinse de la fiecare mână poate fi reprezentat respectiv, prin: (5 - $a$) şi (5 - $b$). Adunând degetele îndoite ca zeci am obținut 10($a$ + $b$) şi înmulțind degetele întinse ca unități avem (5 - $a$)(5 - $b$). Acum dacă scriem identitatea: $(5 + a)(5 + b) = 10(a + b) + (5 - a)(5 - b)$ în care membrul al doilea reprezintă exact operațiile pe care le-am executat mai sus pentru efectuarea înmulțirii şi dacă efectuăm calculele, vedem că ea se verifică.

### *20. O invenție genială: abacul roman, suan-panul chinezesc şi sciotul rusesc*

Cei mai străluciți matematicieni ai Antichității nu au reuşit să inventeze reguli simple de calcul cu ajutorul numerelor scrise din litere. Nici calculul pe degete nu putea fi împins decât până la o anumită limită.

Chiar şi vechiul procedeu numit în textele romane *digitis comptare* care permitea 18 combinații cu degetele mâinilor şi care dădea posibilitatea exprimării numerelor de mărimea miilor, nu a mai corespuns atunci când bogățiile au început să crească şi când trebuiau mânuite numere mult mai mari. Operațiile cu cifrele romane erau şi ele extrem de greoaie. O simplă înmulțire cu asemenea cifre cerea calcule lungi şi transformări.

Iată, de exemplu, cum se efectua cu cifre romane înmulțirea a două numere mici cum ar fi CCLXXXVII cu XXXII, adică 287 x 32:

| | |
|---|---|
| CCX | MM |
| CCX | MM |
| CCX | MM |
| LXXX XXX | MMCCCC |
| VII XXX | CCX |
| CC II | CCCC |
| LXXX II | CLX |
| VII II | XIV |
| | MXCLXXXIV |

Am văzut că liniuța de deasupra unei cifre o înmulțeşte pe aceasta cu 1.000. Deci X = 10.000, iar rezultatul înmulțirii noastre se citeşte 9.184. Dacă urmărim cele două coloane de cifre romane putem vedea şi care sunt operațiile parțiale folosite pentru a ajunge la acest rezultat, începând de la stânga spre dreapta, atât cifrele deînmulțitului cât şi cele ale înmulțitorului le-am împărțit în grupe care se pot uşor înmulți între ele mintal. Această operație cere o mare atenție pentru ca nu cumva o cifră dintr-o grupă să se strecoare în alta. Rezultatele înmulțirilor parțiale se aşază unul sub altul astfel ca să cadă, pe cât este posibil, mii sub mii, sute sub sute etc.

Apoi adunăm rezultatele parțiale începând de la dreapta spre stânga. Totalul acestei adunări reprezintă rezultatul înmulțirii noastre. Iată această înmulțire „tradusă" în sistemul de cifre indo-arabe şi cu semnele operațiilor pe care le folosim noi:

200 x 10 = 2.000
200 x 10 = 2.000
200 x 10 = 2.000
80 x 30 = 2.400
7 x 30 = 210
200 x 2 = 400
80 x 2 = 160
7 x 2 = 14
9.184

Cu numerele scrise în sistemul indo-arab şi cu tehnica noastră de calcul, o asemenea înmulțire o poate face un copil de clasa a II-a elementară. În fața unor asemenea greutăți era deci natural ca popoarele, împinse de aceleaşi necesități, să caute alte căi şi să inventeze sisteme noi de calcul folosind instrumente foarte asemănătoare. Astfel s-a dezvoltat la romani *abacul,* la chinezi şi coreeni *suan panul* şi la ruşi *sciotul.*

Chinezii şi egiptenii cunoşteau acest instrument cu multe milenii înainte de era noastră. Romanii l-au moştenit sub o formă rudimentară de la etrusci, dar îl cunoşteau şi vechii greci. Când spaniolii au descoperit America, indigenii din Mexic şi Peru ştiau de mult să calculeze cu un instrument similar.

Abacul este o placă în care sunt săpate o serie de şănțulețe paralele. În fiecare şănțuleț se introduc câte 10 pietricele care se pot mişca la dreapta şi la stânga. Deoarece în limba latină cuvântul pietricică se numeşte *calculus,* romanii au luat obiceiul de a numi *calculare* operația de a socoti cu pietricelele abacului. De

acolo vin şi cuvintele noastre calcul şi calculator. În loc de pietricele se întrebuinţau uneori oscioare, iar *sciotul* îşi trage numele de la cuvântul rusesc *sciot* care înseamnă, oscior. Pietricelele sau oscioarele sunt de obicei rotunjite ca nişte bile. Bilele din primul rând al instrumentului reprezintă unităţi, cele din rândul al doilea se folosesc ca zeci, cele din rândul următor ca sute, şi aşa mai departe. Această invenţie genială de a da bilelor valori după locul ocupat de ele, permite, cu abacul sau cu sciotul, efectuarea de calcule cu numere foarte mari, dar nu oricât de mari.

### *21. Cele patru operaţii erau şase*

Greu, uşor, cu degetele mâinilor, cu bastonaşe, cu pietricele, cu abacul sau sciotul, cei vechi reuşeau să efectueze calcule aritmetice. Ei cunoşteau cele patru operaţii care însă la unele popoare erau şase... Astfel la egipteni, dublarea unui număr era considerată ca o operaţie aritmetică aparte. La fel, împărţirea prin doi era socotită ca a şasea operaţie. Părerea aceasta s-a menţinut până în sec. al XVI-lea când a fost combătută definitiv de către matematicianul italian Luca Pacciuoli (numit şi Luca de Borgo - matematician italian născut la Borgo San Sepolero în anul 1445; fiind călugăr franciscan, a voiajat în ţările orientului; a fost profesor de matematică în mai multe oraşe din Italia; a scris mai multe tratate de aritmetică şi geometrie şi o lucrare intitulată *„Despre proporţia divină",* în care tratează problema *„tăieturii de aur").*

### *22. Despre Pitagora şi tabla care nu este a lui Pitagora*

Pitagora a fost unul din marii matematicieni ai Antichităţii. El a trăit între anii 580 - 500 î.e.n. şi o bună parte din viaţa sa şi-a petrecut-o călătorind prin Egipt, Asia Mică, Babilonia, India şi poate chiar prin China. Din călătoriile sale, Pitagora a adus un însemnat număr de cunoştinţe matematice. Pe seama lui Pitagora se pun însă prea multe creaţii ştiinţifice. Ar fi imposibil de crezut ca, într-o viaţă de om, un savant oricât de genial să poată crea atât. Probabil că toate cunoştinţele matematice pe care Pitagora le-a cules din ţările în care a poposit cu prilejul călătoriilor sale, i-au fost atribuite acestui învăţat, cu sau fără voinţa lui. Omenirea nu-l cunoaşte pe Pitagora din scrierile sale, pentru că de la el nu a rămas nimic scris.

Scrierile sale probabil că s-au pierdut sau au fost distruse. Există şi posibilitatea ca el nici să nu fi scris nimic. Toată ştiinţa lui Pitagora, cunoscută astăzi, a fost reconstituită după scrierile filozofilor greci Platon şi Aristotel.

Cu toţii îl ştim după nume pe Pitagora, pentru că noi am învăţat să memorăm înmulţirea numerelor de la 1 până la 10 după *„tabla lui Pitagora".* Din cercetările mai recente s-a dovedit că unele popoare ale Asiei cunoşteau această *„tablă a înmulţirii"* de acum 4.000 de ani. De unde rezultă că *„tabla lui Pitagora"* nu este a lui Pitagora...

Noi însă vom continua s-o numim mai departe *„tabla lui Pitagora"* numai pentru meritul pe care l-a avut acest învăţat de a fi adus-o în Europa. Tabla lui Pitagora s-a născut, ca o necesitate a timpului, pentru că dădea posibilitatea să se efectueze în mod mecanic înmulţirea a două numere mici. Până în sec. al XV-lea nimeni nu căuta să memoreze aceste înmulţiri.

Nu era folosită tehnica noastră de calcul care dă posibilitatea să înmulţeşti două numere oricât de mari, cunoscând, din memorie, numai produsele unor numere mici, de la 1 până la 9. Oamenii căutau atunci în tabla lui Pitagora produsul a două numere aşa cum noi căutăm într-un dicţionar traducerea unui cuvânt românesc într-o limbă străină. Dar această tablă permitea numai înmulţirea unor numere mici. La înmulţirea numerelor mai mari, cei vechi întâmpinau dificultăţi uriaşe din cauza sistemelor pe care le foloseau la scrierea acestor numere, sisteme care nu permiteau o aranjare lesnicioasă a calculelor.

În diferite cazuri dificultăţile erau învinse datorită folosirii în mod mecanic a unor cunoştinţe destul de avansate de matematică.

### *23. Înmulţirea egipteană*

Egiptenii antici reduceau orice înmulţire la un şir de *dublări* şi la o sumă. În această operaţie ei se bazau pe o teoremă, cunoscută în vremea aceea, potrivit căreia orice număr întreg este suma unor puteri ale lui 2. Iată, de pildă, cum efectuau egiptenii înmulţirea 134 x 37 = 4.958. Descompunând pe cel mai mic dintre factorii acestei înmulţiri în suma unor puteri ale lui 2, se obţine: $37 = 2^o + 2^2 + 2^5$ sau $37 = 1 + 2^2 + 2^5$. Deci se poate scrie: $134 \times 37 = 134 \times (1 + 2^2 + 2^5)$. Calculul se aşează în felul următor:

| | | |
|---|---|---|
| $134 \times 1$ | | = 134 |
| $134 \times 2^2 = 134 \times 2 \times 2$ | $= 268 \times 2$ | = 536 |
| $134 \times 2^5 = 134 \times 2^2 \times 2^3$ | $= 536 \times 2 \times 2 \times 2 = 1.072 \times 2 \times 2 = 2.144 \times 2$ | = <u>4.288</u> |
| | Total | 4.958 |

Noi am aranjat foarte frumos şi relativ uşor acest calcul, pentru că dispunem de semne şi mijloace de notare foarte practice. Gândiţi-vă însă la egiptenii antici care scriau cu hieroglife sau chiar cu scrierea hieratică şi nu ştiau să folosească exponenţi sau vreun alt simbol simplu care indică operaţiile aritmetice.

### *24. Înmulţirea rusească*

Ţăranii ruşi obişnuiau să înmulţească două numere folosind dublarea unuia din ele şi împărţirea prin doi a celuilalt. Operaţia se aşază pe două coloane. Prima coloană are drept cap pe cel mai mare dintre factori. Numerele din prima coloană se dublează continuu, pe când cele din coloana a doua se împart succesiv prin 2. înmulţirea se termină atunci când în coloana a doua se obţine drept cât numărul 1. Ultimul număr din coloana întâia este rezultatul înmulţirii. Să încercăm un exemplu: 86 x 64 = 5.504:

| | |
|---|---|
| ***86*** | ***64*** |
| 172 | 32 |
| 344 | 16 |
| 688 | 8 |
| 1 376 | 4 |
| 2 752 | 2 |
| ***5 504*** | **1** |

Cum se explică procedeul întrebuințat de țăranii ruşi? Foarte simplu. Prima coloană reprezintă produsele succesive prin 2 ale unuia din factorii înmulțirii. A doua coloană este formată din tot atâtea caturi succesive prin 2 ale celuilalt factor al produsului. Deci, în loc de 86 x 64, am efectuat de fapt următoarele operații: $\frac{86 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 64}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$. Prin urmare noi nu am decât să înmulțim şi să împărțim produsul 86 x 64 prin aceeaşi cantitate. Prin aceasta, valoarea produsului nu s-a schimbat.

Ce se întâmpla însă când înmulțitorul este un astfel de număr, încât după o împărțire prin 2 obținem un număr impar? În acest caz operația se aşează la fel, iar împărțirea prin 2 se continuă mai departe luându-se în considerare, numărul par imediat anterior. Numărul din coloana întâia care corespunde cu un număr impar din coloana a doua se însemnă cu o cruce. Toate numerele cu cruci se adună apoi la ultimul număr din coloana întâia. Suma obținută este rezultatul căutat al înmulțirii. Pentru a şti de ce se procedează astfel, să urmărim perechile de numere din cele două coloane ale înmulțirii 185 x 148.

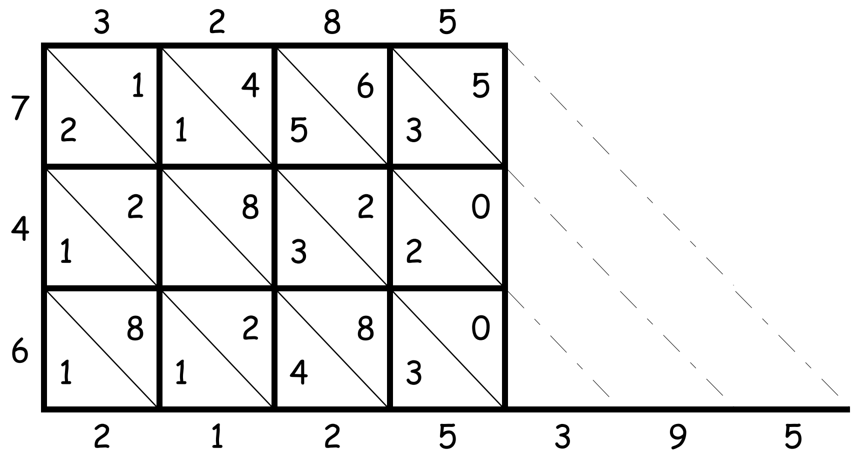
| | |
|---|---|
| ***185*** | ***148*** |
| 370 | 74 |
| 740+ | 37 |
| 1 480 | 18 |
| 2 960+ | 9 |
| 5 920 | 4 |
| 11 840 | 2 |
| 23 680 | 1 |
| 740 | |
| 2 960 | |
| ***27380*** | |

Am efectuat următoarele operații: $185 \times 148 = 185 \times 2 \times \frac{148}{2} = 370 \times 74$. Mai departe: $185 \times 148 = 370 \times 74 = 185 \times 2 \times 2 \times \frac{148}{2 \times 2} = 740 \times 37$. Când am trecut însă de la 740 x 37 la 140 x 18, adică la $740 \times 2 \times \frac{36}{2}$, am neglijat odată pe 740, pentru că în loc de $\frac{37}{2}$ am luat $\frac{36}{2}$.

La fel, în una din operațiile următoare l-am neglijat odată pe 2.960. Urmează deci că aceste două numere trebuie neapărat adăugate la ultimul rezultat din coloana întâia spre a putea obține rezultatul adevărat al produsului 185 x 148.

### *25. Înmulțirea musulmană*

Pentru a efectua o înmulțire, unele popoare musulmane întrebuințau un dispozitiv special de calcul care necesita şi o liniatură specială a hârtiei. Să vedem cum se aranjează un astfel de calcul şi pentru aceasta să luăm ca exemplu înmulțirea 3285 x 647. Deoarece avem de înmulțit un număr de 4 cifre cu unul de 3 cifre, construim un dreptunghi care să cuprindă 4 x 3 = 12 casete egale.




***O înmulțire musulmană***

Fiecare casetă o împărțim în câte două triunghiuri printr-o diagonală. Pe latura orizontală superioară a dreptunghiului scriem numărul mai mare care devine deînmulțit. Pe latura verticală din stânga așezăm celălalt număr scris de jos în sus. Cifrele le dispunem astfel ca fiecare din ele să cadă în dreptul unei casete. Multiplicăm apoi fiecare cifră a înmulțitorului pe rând cu toate cifrele deînmulțitului. Rezultatele obținute le înscriem în casetele care se găsesc la intersecția coloanei verticale cu linia orizontală a celor două cifre care se înmulțesc de fiecare dată. Cifra unităților o înscriem în triunghiul superior al casetei, iar cifra zecilor în cel inferior.

Acum nu avem decât să adunăm cifrele care se află între două diagonale consecutive, de la dreapta spre stânga, iar rezultatele să le înscriem sub latura orizontală inferioară. Astfel vom avea pe rând: 5, apoi 3 + 6 = 9, pe urmă 2 + 5 + 4 = 13 (scriem 3 și adunăm 1 la suma cifrelor cuprinse între cele două diagonale următoare) și așa mai departe. Rezultatul înmulțirii este 2.125.395.

Justificarea metodei este foarte simplă. De fapt, aplicând procedeul arătat, noi nu am făcut decât să facem următoarea operație:

$$(3.000 + 200 + 80+ 5)(7 + 40 + 600) = 3.285 \times 647$$

Desfăcând aceste paranteze, înmulțirile parțiale le putem aranja ușor astfel cum se vede mai jos:

$$\begin{array}{rcrcr}
3.000 & \text{X} & 7 & = & 21.000 \\
200 & \text{X} & 7 & = & 1.400 \\
80 & \text{X} & 7 & = & 560 \\
5 & \text{X} & 7 & = & 35 \\
3.000 & \text{X} & 600 & = & 1.800.000 \\
200 & \text{X} & 600 & = & 120.000 \\
80 & \text{X} & 600 & = & 48.000 \\
5 & \text{X} & 600 & = & \underline{\quad 3.000} \\
 & & & & 2.125.395
\end{array}$$

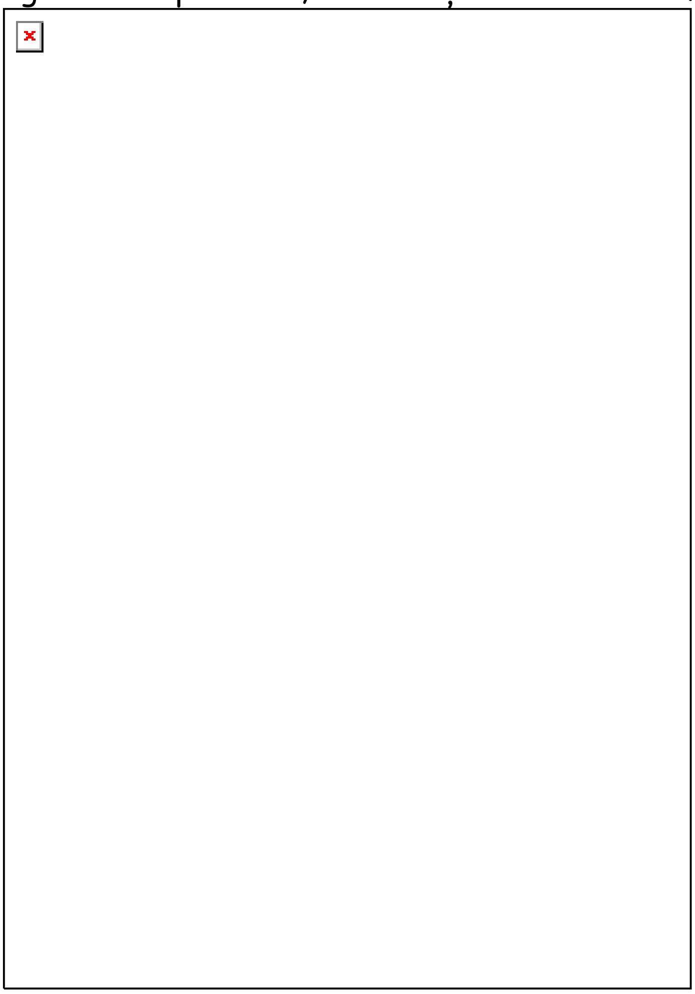
Operațiile de mai sus nu sunt decât o repetare a înmulțirilor parțiale pe care le-am făcut cu cifrele din dreptunghiul anterior. Mai bine zis este o rotire cu 90° a întregului dreptunghi inclusiv operațiile cuprinse în el. Înmulțirea musulmană are avantajul că se poate începe calculul indiferent din care parte dorim, de la dreapta

sau de la stânga, de jos sau de sus. Introducerea acestei metode a fost considerată ca o mare înlesnire în tehnica înmulțirii.

***26. Despre Neper şi bastonaşele lui***

John Neper a fost un matematician englez, originar din Scoția, care a trăit între anii 1550 - 1617. El este cunoscut mai ales ca inventator al logaritmilor. Cu ajutorul logaritmilor ne putem permite să înlocuim o operație aritmetică prin alta inferioară: o ridicare la putere devine o înmulțire; o împărțire se înlocuieşte printr-o scădere; în locul unei înmulțiri se efectuează o adunare şi aşa mai departe. Preocupat de a da metode lesnicioase de calcul, Neper a recurs la ajutorul unor bastonaşe. Aceasta nu înseamnă că el s-a întors la metoda folosită de chinezi în urmă cu mii de ani.

Pentru Neper fiecare bastonaş nu reprezenta un deget, adică o unitate. Bastonaşele lui Neper poartă înscrise pe ele numere care pot deveni unități, zeci, sute etc. Aceste bastonaşe sunt nişte prisme cu baza pătrată. Fețele lor sunt împărțite în câte 10 pătrate egale. Fiecare față poartă ca titlu înscris pe primul pătrat un număr din şirul de la 1 la 9. Există deci bastonaşe cu titluri ca: 0, 1, 9, 8; 0, 2, 9, 7; 0, 3, 9, 6; 0, 4, 9, 5; 1, 2, 8, 7; etc. În pătratele următoare sunt trasate diagonale de la dreapta sus spre stânga jos. În fiecare din aceste pătrate se află înscrişi multiplii titlului respectiv în ordinea crescătoare. Zecile acestor multiplii sunt trecute în triunghiurile superioare, iar unitățile lor în cele inferioare.



***Bastonaşele lui Neper***

Un alt bastonaş, identic cu celelalte, este împărțit la fel în pătrate, dar fără diagonale. Primul lui pătrat este gol. Pe celelalte pătrate el poartă înscris câte un număr din şirul 1, ..., 9 în ordinea naturală. Acum să executăm o înmulțire cu aceste bastonaşe, de exemplu, 5.698 x 387. Aşezăm la dreapta bastonaşului care poartă şirul de numere 1, ..., 9 patru bastonaşe care să aibă titlurile 5, 6, 9, 8 în ordinea în care ele formează deînmulțitul. în dreptul numărului 7 al bastonaşului din stânga vor cădea produsele numerelor 5, 6, 9 şi 8 prin 7, care se citesc de-a dreptul pe respectivele bastonaşe.

În felul acesta, pentru a afla produsul parțial 7 x 5.698, nu avem decât să transcriem cifrele din rândul corespunzător lui 7, având numai grijă să adunăm cifrele care se găsesc în acelaşi paralelogram, deoarece zecile rezultate din multiplicarea unei cifre devin unități la înmulțirea cifrei următoare. Bineînțeles că la extremitatea din dreapta se va avea câte un triunghi, a cărui cifră se transcrie direct. în acelaşi mod se citesc şi celelalte produse parțiale. Toate produsele parțiale se scriu unul sub altul. Suma lor ne dă produsul căutat.

# *Capitolul 4* *Curiozitățile unor numere întregi şi ale unor fracții*

## *4.1* *Numere cu calități ... morale*

### *27. Ce părere avea Pitagora despre numere*

La popoarele la care s-a dezvoltat o matematică din timpurile cele mai vechi, ştiința era deținută mai mult de preoți. Unii din ei cunoşteau şi ştiința numerelor. Datorită anumitor combinații pe care le făceau cu unele numere, preoții obțineau rezultate care apăreau curioase. De aceea ei dădeau înțelesuri şi interpretări supranaturale acestor numere. Preoții atribuiau numerelor puteri magice pe care le foloseau pentru dominarea spirituală a maselor şi chiar a conducătorilor politici şi militari. În călătoriile sale, Pitagora a învățat matematica şi sub acest aspect. Dar, cu toate că reuşise să demonstreze ştiințific cauzele particularităților unor numere şi unor figuri geometrice, el şi-a bazat filozofia lui pe o idee care nouă ni se părea foarte curioasă.

Ideea principală a filozofiei lui Pitagora se rezumă la următoarele: totul este număr; actele omului, muzica, ştiința, fenomenele care se petrec în jurul nostru sunt dominate de număr. După Pitagora şi adepții lui, pitagoricenii, fiecare număr îşi are însemnătatea lui şi este investit cu anumite calități...morale. Astfel, 1 reprezenta rațiunea, iar 2 părerea. 3 era considerat ca primul număr masculin, alături de 2 care avea calitatea de a fi primul număr feminin şi deci 5, care rezultă din unirea acestor două numere, era imaginea căsătoriei. 4 avea într-însul darul justiției. 6 conținea secretul sănătății. 13 era văzut ca un număr nefast ... ş.a.m.d. La fel, pitagoricenii interpretau şi figurile geometrice.

Aşadar, Pitagora şi pitagoricenii susțineau că „numerele guvernează lumea". Bineînțeles că ei nu aveau dreptate în toată această filozofie a lor. După cum am mai arătat la începutul acestei cărți, toate fenomenele care se petrec în jurul nostru sunt naturale. Ele au loc după anumite legi fizice, chimice etc. Numărul nu reprezintă decât un mijloc prin care putem exprima, în anumite unități de măsură, bine stabilite, relațiile cantitative între fenomene. Spre deosebire de maestrul lor care înțelegea să-şi țină lecțiile publice în fața unui auditoriu vast, pitagoricenii au format societăți misterioase şi secrete. Orice descoperire matematică se comunica membrilor acestei societăți sub prestare de jurământ. Divulgarea secretelor era aspru pedepsită.

Astfel se povesteşte că în sec. IV î.e.n., un membru al unei societăți de pitagoriceni, Hippasus, a fost înecat în baia sa pentru că a făcut cunoscut unor prieteni că la lista corpurilor geometrice cunoscute s-a mai adăugat şi un poliedru regulat cu 12 fețe (marele filozof grec Democrit, care a trăit între anii 460 şi 360 î.e.n. şi care era cel mai vestit cercetător al naturii din antichitate, a adus şi el din călătoriile sale multe cunoştințe matematice adunate de la preoții egipteni; dar el a scuturat aceste cunoştințe de colbul magiei şi le-a redat curate, ştiințific, aşa cum le-a văzut el; de altfel, este ştiut că Democrit a fost primul filozof materialist).

În fine, Pitagora şi elevii lui, după ce mai clasificau numerele în băieți şi fete, deştepte şi proaste, mulțumite şi nemulțumite... ei mai considerau că există *numere perfecte* şi *numere amiabile* (prietene). Cel puțin denumirile ultimelor două feluri de numere au putut să capete şi o explicație matematică, şi de aceea vom vorbi despre ele.

### *28. Ce sunt numerele perfecte?*

Pitagora a cunoscut două numere întregi: 6 şi 28, care prezintă următoarea particularitate: fiecare din aceste numere este egal cu suma divizorilor săi, din care se exclude însuşi numărul. Astfel, 6 are ca divizori pe 1, 2, 3 şi 6, iar 28 are ca divizori pe 1, 2, 4, 7, 14 şi 28. La aceste două numere, excluzând respectiv divizorii 6 şi 28, vom avea: 6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14. Mulți ani după Pitagora, Nicomac din Alexandria (Nicomac din Alexandria, filozof şi matematician grec născut la Gerasa (Arabia); a trăit prin sec. I e.n.; adept al lui Pitagora, a scris o biografie a acestui mare învățat, precum şi o seamă de lucrări de matematică şi de muzică, dintre care mai multe s-au pierdut; ne-au rămas numai un manual de armonie şi „Introducerea la studiul aritmeticii", din care rezultă că Nicomac poseda cunoştințe foarte avansate de aritmetică) şi-a pierdut foarte mult timp ca să mai găsească şi el numai două numere perfecte, 496 şi 8.128. Până la numărul 33.550.336 nu se mai găseşte un alt număr perfect.

După aceasta vine: 8.489.869.056, 137.438.691.328,

2.305.843.008.139.952.128 şi în fine, ultimul număr perfect care s-a calculat: 2.658.455.991.569.831.744.654.692.615.953.842.176. Toate numerele perfecte pe care le-am arătat sunt pare. Pe când teoria numerelor perfecte impare nu este încă complet cunoscută, aceea a numerelor pare se cunoaşte bine şi s-a dat chiar o formulă cu care se poate găsi orice număr perfect par. Aceasta înseamnă posibilitatea de calculare a unor numere mai mari ca ultimul arătat mai sus, care de fapt nu prezintă nici o valoare practică.

### *29. Numere amiabile*

Se pot găsi perechi de numere, astfel ca suma divizorilor unuia din ele să fie egală cu cel de al doilea şi reciproc, suma divizorilor celui de al doilea să ne dea primul număr, cu condiția ca între divizori să nu intre numărul însuşi.

Să luăm ca exemplu numerele 220 şi 284. Divizorii lui 220 sunt: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 şi 220. Suma lor, din care se exclude 220, este 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284. Divizorii lui 284 sunt: 1, 2, 4, 71, 142 şi 284. Suma lor din care se exclude 284, este 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220. O pereche „amiabilă". Aceste două numere, 220 şi 284, constituie deci o pereche de numere amiabile.

O tabelă cu primele 5 perechi de numere amiabile, în ordinea lor crescătoare, descompuse în divizorii lor, cu excluderea numărului considerat, se vede mai jos. Se poate foarte uşor urmări pe această tabelă că suma acestor divizori ai unui număr ne dă numărul „amicului" său.

| *Numerele amiabile* | *Divizorii* | *Suma divizorilor* |
|---|---|---|
| 220 | 1 2 4 5 10 11 20 22 44 55 110 | 284 |
| 284 | 1 2 4 71 142 | 220 |
| 2620 | 1 2 4 5 10 20 131 262 524 655 1310 | 2924 |
| 2924 | 1 2 4 17 34 43 68 86 172 731 1462 | 2620 |
| 5020 | 1 2 4 5 10 20 251 502 1004 1255 2510 | 5564 |
| 5564 | 1 2 4 13 26 52 107 214 428 1391 2784 | 5020 |
| 6232 | 1 2 4 8 19 38 41 76 82 152 164 328 779 1558 3116 | 6368 |
| 6368 | 1 2 4 8 16 32 199 398 796 1592 3184 | 6232 |
| 10744 | 1 2 4 8 17 34 68 79 136 158 316 632 1343 2686 5372 | 10856 |
| 10856 | 1 2 4 8 23 46 59 92 118 184 236 472 1357 2714 5428 | 10744 |

Se pare că sunt cunoscute până în prezent toate perechile de numere amiabile până la 100.000. Se cunosc însă şi foarte multe perechi de numere amiabile şi peste 100.000. Numărul perechilor cunoscute până în prezent ar fi de circa 365.

## *4.2 Unele numere şi curiozităţile lor*

### *30. Cifra 1*

Cu cele 10 cifre de la O la 9, luate fiecare o singură dată, se pot forma fracţii a căror sumă să fie egală cu unu:

$$\frac{135}{270}+\frac{48}{96}=1, \qquad \frac{35}{70}+\frac{148}{296}=1.$$

Numărul cel mai mare care se poate scrie, folosind de patru ori cifra 1, nu este 1111 ci $11^{11}$. Efectuând operaţiile, obţinem un număr mai mare decât numărul format din 28 urmat de 10 zerouri. Acest număr este aproximativ de 250.000.000 ori mai mare decât 1.111.

### *31. Cifra 7*

A ridica numărul 7 la puterea a patra constituie o operaţie foarte simplă: $7^4$ =7 x 7 x 7 x 7 = 2401. Numărul 2401 prezintă însă o curiozitate legată de numărul 7. Dacă facem suma cifrelor lui 2401, luate ca simple unităţi, obţinem din nou numărul 7. Într-adevăr: 2 + 4 + 0 + 1 = 7.

Să urmărim următoarele 5 operaţii cu numărul 7:

7 x 1 + 1 = 8
7 x 12 + 2 = 86
7 x 123 + 3 = 864
7 x 1.234 + 4 = 8.642
7 x 12.345 + 5 = 86.420

Iată ce observăm interesant la acest frumos tablou de numere: adăugând produsului 7 x 1 o unitate, obţinem ca rezultat un număr format dintr-o cifră pară: 8. Când trecem la produsul 7 x 12 şi adăugăm acestuia 2 unităţi, numărul rezultat are două cifre pare şi aşa mai departe. Cifrele pare care formează aceste numere se

succed în ordinea lor descrescătoare începând cu 8 şi terminând cu zero. Să nu uităm că şi zero este un număr par. Din cele cinci rezultate de mai sus (8, 86, 864, 8642 şi 86420) să scoatem cifrele identice. Vom avea doi de 2, trei de 4, patru de 6 şi cinci de 8. Dacă astfel grupate, adunăm aceste cifre ca simple unități, obținem:

$$2 + 2 = 4$$
$$4 + 4 + 4 = 12$$
$$6 + 6 + 6 + 6 = 24$$
$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40,\ \text{iar}$$
$$4 = 4 \times 1$$
$$12 = 4 \times (1 + 2)$$
$$24 = 4 \times (1 + 2 + 3)$$
$$40 = 4 \times (1 + 2 + 3 + 4)$$

### *32. Cifra 9*

Luând numerele de la 1 la 10 şi înmulțind pe fiecare din ele cu numărul 9, se obțin următoarele produse:

$$1 \times 9 = 9,\ 2 \times 9 = 18,\ 3 \times 9 = 27,\ 4 \times 9 = 36,\ 5 \times 9 = 45,$$
$$6 \times 9 = 54,\ 7 \times 9 = 63,\ 8 \times 9 = 72,\ 9 \times 9 = 81,\ 10 \times 9 = 90$$

Ce observăm privind coloanele de cifre de mai sus? Cifrele zecilor ale acestor produse se succed în ordinea lor naturală, iar cifrele unităților se succed şi ele, însă în ordine descrescătoare. Aceste rezultate se explică prin faptul că 9 = 10 - 1, şi deci înmulțirea cu 9 nu este decât o înmulțire cu (10 - 1). Astfel:

$$4 \times 9 = 4 \times (10 - 1) = 40 - 4 = 36 = 30 + 6$$
$$5 \times 9 = 5 \times (10 - 1) = 50 - 5 = 45 = 40 + 5$$

Prin urmare, pentru fiecare creştere a deînmulțitului cu o unitate, produsele cresc şi ele cu o zece, dar descresc cu o unitate.

### *33. Numărul 14*

Întrebuințând de 5 ori oricare din cifrele de la 1 la 9 şi diverse semne indicând operațiuni aritmetice, se poate obține numărul 14 astfel:

$$11 + 1 + 1 + 1 = 14$$
$$2^2 + 2^2 - 2 = 14$$
$$\frac{33}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} + 3 = 14$$
$$4 \times 4 - \frac{4 + 4}{4} = 14$$
$$5 + 5 + 5 - \frac{5}{5} = 14$$
$$6 + 6 + \frac{6 + 6}{6} = 14$$
$$7 + 7 + \sqrt{7 \times 7} - 7 = 14$$
$$8 + 8 - \frac{8}{8} = 14$$
$$9 + 9 - \sqrt{9} - \frac{9}{9} = 14$$

Dacă încercați, mai puteți găsi şi alte combinații similare.

### *34. Numărul 15*

Şi numărul 15 se poate obţine cu oricare din cifrele cuprinse în şirul natural de la 1 la 9, însă întrebuinţând fiecare cifră de 6 ori împreună cu diferite semne indicând operaţii aritmetice.

$$11+1+1+1+1=15$$

$$(2+2)^2-2+\frac{2}{2}=15$$

$$\frac{3\times3\times3}{3}+3+3=15$$

$$4\times4-\frac{4+4}{4+4}=15$$

$$\frac{55}{5}+5-\frac{5}{5}=15$$

$$6+6+\frac{6+6+6}{6}=15$$

$$7+\frac{7\times7}{7}+\frac{7}{7}=15$$

$$8+8-\frac{8+8}{8+8}=15$$

$$\sqrt{9\times9}+9+\sqrt{9}-9+\sqrt{9}=15.$$

Se mai pot găsi şi alte combinaţii. Încercaţi!

### *35. Numerele 29 şi 41*

Dacă înmulţim $29^2$ cu $41^2$ obţinem numărul 1.413.721. Cum: $\sqrt{1.413.721}=1.189$, vom putea scrie: $29^2$ x $41^2$ = $1.189^2$. Despărţind acum cifrele numărului 1.189 în grupe de câte 2 cifre şi adunând aceste grupe, obţinem: 11 + 89 = 100.

Să considerăm acum din nou produsul: $29^2$ x $41^2$ = 1.413.721. Şi aici, dacă despărţim pe 1.413.721 în grupe de câte 2 cifre de la stânga la dreapta şi apoi de la dreapta spre stânga şi adunăm pe urmă grupele respective, dăm tot peste numărul 100: 14 + 13 + 72 + 1 = 100, 12 + 73 + 14 + 1 = 100. Mai departe, inversând numerele astfel grupate avem: 41 + 31 + 27 + 1 = 100, 21 + 37 + 41 + 1 = 100, şi deci iar 100...

### *36. Numărul 37*

Să considerăm şirul de numere format din multiplii lui 3 până la 27: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. Dacă înmulţim fiecare termen al şirului de mai sus cu 37, obţinem: 37 x 3 = 111, 37 x 12 = 444, 37 x 21 = 777, 37 x 6 = 222, 37 x 15 = 555, 37 x 24 = 888, 37 x 9 = 333, 37 x 18 = 666, 37 x 27 = 999. Se observă deci că fiecare produs este format din 3 cifre egale. Dacă adunăm cifrele acestor produse, luate ca simple unităţi, obţinem respectivii înmulţitori ai lui 37 sau termenii şirului de numere date: 1 + 1 + 1 = 3, 2 + 2 + 2 = 6, 3 + 3 + 3 = 9 şi aşa mai departe.

De unde rezultă această particularitate a numărului 37?

Răspunsul este foarte simplu: acest număr înmulţit cu 3 ne dă 111. Deci, dacă îl vom înmulţi cu un multiplu de 3 vom obţine multiplii de 111. De exemplu:

37 x 18 = 37 x 3 x 6 = 111 x 6 = 666.

***37. Alte particularități ale numărului 37***

$37 = 3^2 + 7^2 - 3 \times 7$, $37 \times (3 + 7) = 3^3 + 7^3$, $3 \times 7 \times 37 = 777$

***38. Numărul 45***

Suma cifrelor de la 1 la 9 ne dă numărul 45. Într-adevăr 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.

***39. Numărul 45***

Se poate descompune într-o sumă de 4 termeni: 8, 12, 5 şi 20, care prezintă o particularitate curioasă. Dacă se adună numărul 2 la primul termen, se scade 2 din al doilea, se înmulțeşte al treilea termen cu 2 şi se împarte al patrulea tot cu 2 se obține totdeauna numărul 10.

***40. Numărul 75***

O particularitate similară cu a lui 45 o prezintă şi numărul 75. Acest număr se poate descompune într-o sumă de alte patru numere astfel: 8 + 16 + 3 + 48 = 75. Adunând numărul 4 la primul termen al sumei, scăzând acelaşi număr din al doilea, înmulțind pe al treilea cu 4 şi împărțind pe al patrulea tot prin 4, obținem regulat numărul 12.

***41. Numărul 100***

Întrebuințând cele 9 cifre semnificative, fără repetiție, se pot găsi numere cu care să se scrie numărul 100 în următoarele 13 feluri:

$$74 + 25 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18} = 100, \quad 94 + 5 + \frac{38}{76} + \frac{1}{2} = 100, \quad 75 + 24 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18} = 100$$

$$94 + \frac{1578}{263} = 100, \quad 91 + 8 + \frac{3}{6} + \frac{27}{54} = 100, \quad 95 + 4 + \frac{38}{76} + \frac{1}{2} = 100,$$

$$91 + \frac{5742}{638} = 100, \quad 96 + \frac{1428}{357} = 100, \quad 91 + \frac{5823}{647} = 100, \quad 96 + \frac{1752}{438} = 100$$

$$91 + \frac{7524}{836} = 100, \quad 96 + \frac{2148}{537} = 100, \quad 98 + 1 + \frac{3}{6} + \frac{27}{54} = 100.$$

Probabil că se mai pot găsi şi alte moduri de exprimare a numărului 100 cu toate cele 9 cifre semnificative fără repetiție.

***42. Iar 100***

Descompunând în sumele de mai sus pe 74 în 70 + 4, pe 91 în 90 + 1 şi aşa mai departe, se pot scrie aceste sume cu toate cifrele de la 0 la 9 luate o singură dată. De exemplu:

$$70 + 4 + 25 + \frac{3}{6} + \frac{9}{18} = 100, \quad 90 + 1 + 8 + \frac{3}{6} + \frac{27}{54} = 100$$

$$90 + 6 + \frac{1.752}{438} = 100, \quad 90 + 8 + 1 + \frac{3}{6} + \frac{27}{54} = 100.$$

***43. Tot 100***

Se poate obține numărul 100 utilizând cele 10 cifre de la 0 la 9, fiecare o singură dată, astfel:

$$50+49+\frac{1}{2}+\frac{38}{76}=100,\ 70+24+5+\frac{3}{6}+\frac{9}{18}=100,\quad 80+19+\frac{3}{6}+\frac{27}{54}=100,$$

$$87+9+3+\frac{4}{5}+\frac{12}{60}=100.$$

***44. Din nou 100***

Considerând numărul 100 ca suma a 4 termeni 12 + 20 + 4 + 64, se observă că: 12 + 4 = 16, 20 - 4 = 16, 4 x 4 = 16, 64 : 4 = 16. În această privință numărul 100 prezintă aceleaşi particularități ca numerele 45 şi 75 pe care le-am arătat mai sus.

***45. Încă o dată 100***

Utilizând de 5 ori aceeaşi cifră se poate scrie numărul 100 în următoarele moduri:

$$100 = 111 - 11,\ 100 = 5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5,\ 100 = 3 \times 33 + \frac{3}{3},\ 100 = (5 + 5 + 5 + 5) \times 5$$

***46. Numărul 165***

Acest număr se poate descompune, într-un anumit mod, într-o sumă de alte patru numere formate din câte două cifre astfel: 165 = 82 + 36 + 13 + 34. Dacă inversăm ordinea cifrelor la fiecare termen al sumei, obținem tot 165.

Iată: 28 + 63 + 31 + 43 = 165.

***47. Numărul 225***

Numărul 225 se poate scrie sub forma unei sume de termeni astfel alcătuiți, încât toți la un loc să conțină toate cele 9 cifre semnificative fără repetiție:

225 = 1 + 23 + 45 + 67 + 89.

***48. Iarăşi 225***

Suma cifrelor semnificative 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 ne dă un multiplu de 9. Mai sunt şi alte numere, la rândul lor multiplii de 9, care se pot descompune într-o sumă de numere care să conțină toate cifrele de la 1 până la 9: 162 = 9 + 12 + 36 + 48 + 57, 171 = 2 + 18 + 39 + 47 + 65, 810 = 195 + 267 + 348. Chiar 225 se mai poate descompune într-o sumă de alți termeni îndeplinind aceeaşi condiție:

225 = 1 + 35 + 42 + 69 + 78.

Cea mai frumoasă însă este descompunerea lui 225, arătată în paragraful precedent, deoarece, înafară de faptul că termenii sunt astfel formați încât cifrele semnificative se succed în ordinea lor naturală, fiecare termen se obține adăugând numărul 22 la precedentul. Astfel:

225 = 1 + (1 + 22) + (23 + 22) + (45 + 22) + (67+22).

### *49. Numărul 15.873*

Să considerăm şirul de numere format din toţi multiplii lui 7 până la 63. Vom avea: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63. înmulţind fiecare termen al acestui şir cu numărul 15873, obţinem: 15.873 x 7 = 111.111, 15.873 x 14 = 222.222, 15.873 x 21 = 333.333, ..., 15.873 x 56 = 888.888, 15.873 x 63 = 999.999. Se vede deci, că produsele lui 15.873 prin fiecare termen al şirului de numere de mai sus sunt numere formate din câte şase cifre totdeauna aceleaşi.

Cifra reprezentativă a fiecărui produs este chiar numărul de ordine al termenului din şirul de multiplii ai lui 7. De exemplu, produsul 333.333, care este format din şase de 3, este rezultatul înmulţirii lui 15.873 cu numărul 21, adică cel de al treilea termen al şirului de numere considerat la început.

Cum se explică acest joc de cifre?

Este de la sine înţeles că dacă 15.873 x 7 = 111.111, atunci şi rezultatul înmulţirii lui 15.873 printr-un număr de două ori mai mare cu 7 va fi dublu, adică 15.873 x 14 = 15.873 x 7 x 2 = 111.111 x 2 = 222.222.

### *50. Numărul 142.857*

Să luăm numerele: 1, 5, 4, 6, 2, 3, care sunt de fapt primele 6 cifre semnificative aşezate într-o anumită ordine. înmulţind numărul 142.857 cu aceste numere în ordinea de mai sus, obţinem:

142.857 x 1 = 142857,
142.857 x 5 = 714285,
142.857 x 4 = 57 1428,
142.857 x 6 = 857142,
142.857 x 2 = 285714,
142.857 x 3 = 428571.

Ce observăm mai deosebit la aceste rezultate?

- fiecare produs este format din cifrele numărului 142.857;
- fiecare produs începe cu cifra cu care se termină precedentul;
- cifrele de pe aceeaşi coloană sunt identice;
- pornind de jos în sus pe fiecare linie oblică a cifrelor produselor, obţinem succesiv din nou aceste produse.

Astfel: 428.571, 285.714... Probabil că se mai găsesc şi alte numere care au aceste proprietăţi.

### *51. Cum se mai poate scrie un milion?*

Cu toţii ştim să scriem un milion din 7 sau 3 cifre. Se scrie 1.000.000 sau $10^6$. Folosim astfel, fie două cifre distincte, fie 3 cifre distincte. Dar dacă am vrea să scriem un milion numai cu aceeaşi cifră, bineînţeles repetată de mai multe ori, am putea? Desigur, că da! Astfel putem scrie: 2 + 2 + 2 ... adică de 500.000 ori cifra 2, sau 4 + 4 + 4 ... adică de 250.000 ori cifra 4, şi aşa mai departe. Dar în felul acesta, numărul cifrelor folosite întrece cu foarte mult numărul de 7, ştiute de noi.

Se poate însă scrie un milion, întrebuinţând aceeaşi cifră maximum de 7 ori, însă cu diverse semne aritmetice între poziţiile pe care le ocupă cifra şi nu numai semnul plus, pe care l-am folosit mai sus. Astfel:

cu 6 de 1: $\sqrt{(11-1)^{11+1}}$; cu 7 de 2: $\left(\frac{22-2}{2}\right)^{2+2^2}$

cu 6 de 3: $\left(3\times 3+\frac{3}{3}\right)^{3+3}$; cu 5 de 4: $\left(\sqrt{4}+4\times\sqrt{4}\right)^{4+\sqrt{4}}$

cu 5 de 5: $(5+5)^{5+\frac{5}{5}}$; cu 5 de 6: $\left(\frac{66-6}{6}\right)^{6}$

cu 7 de 7: $\left(\frac{77-7}{7}\right)^{7+\frac{7}{7}}$; cu 6 de 8: $\left(8+\sqrt{\sqrt{8+8}}\right)^{8-\sqrt{\sqrt{8+8}}}$

cu 5 de 9: $\left(9+\frac{9}{9}\right)^{\sqrt{9}+\sqrt{9}}$.

Dacă la fiecare caz în parte, din cele de mai sus, efectuăm operaţiile indicate de semnele aritmetice, observăm că toate aceste jocuri de cifre se reduc la a scrie $10^6$ = 1.000.000.

### *52. Un milion din toate cifrele de la 0 la 9*

Întrebuinţând toate cifrele de la 0 la 9 fiecare o singură dată, se poate scrie numărul un milion sub forma următoare:

$$80\times 625\times\left[7+9+\sqrt{(1+3)\times 4}\right]$$

Efectuaţi operaţiile aritmetice şi veţi vedea.

### *53. Numărul 12.345.679*

Acest număr este format din opt cifre semnificative, aşezate în ordinea lor naturală şi din care lipseşte însă cifra 8. Mai departe, să considerăm şirul de numere format din toţi multiplii lui 9 de la 9 la 81. Vom avea: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81. Dacă înmulţim numărul 12.345.679 cu un termen oarecare al acestui şir, obţinem un număr format din 9 cifre egale. Exemple:

12.345.679 x 9 = 111.111.111
12.345.679 x 36 = 444.444.444
12.345.679 x 63 = 777.777.777
12.345.679 x 81 = 999.999.999.

Ce observăm la rezultatele acestor înmulţiri? Cifra din care este format fiecare produs obţinut prin înmulţirea numărului 12.345.679 cu un termen al şirului de numere format din multiplii lui 9 indică locul acestui termen în şirul considerat.

Exemplu: termenul 36 ocupă locul 4, deci produsul numărului 12.345.679 cu 36 va fi 444.444.444. Particularităţile mai sus arătate ale numărului 12.345.679 se explică prin următoarele identităţi:

12.345.679 x 9 = 111.111.111
12.345.679 x 36 = 12.345.679 x 9 x 4 = 111.111.111 x 4 = 444.444.444

### *54. Numărul 123.456.789*

După cum vedeți, acesta este un număr format din cele 9 cifre semnificative aşezate în ordinea lor naturală. înmulțind numărul 123.456.789 pe rând cu fiecare din cifrele semnificative, afară de acelea care sunt multipli de 3, adică 3, 6 şi 9, obținem următoarele rezultate:

123.456.789 x 1 = 123.456.789
123.456.789 x 2 = 246.913.578
123.456.789 x 4 = 493.827.156
123.456.789 x 5 = 617.283.945
123.456.789 x 7 = 864.197.523
123.456.789 x 8 = 987.654.312

Observați că rezultatele obținute sunt numere formate tot din toate cele 9 cifre semnificative luate o singură dată şi aşezate într-o ordine diversă.

### *55. Numărul 987.654.321*

Să luăm numerele formate din cele 9 cifre semnificative în ordinea lor descrescândă, 987.6541.521, şi în ordinea lor naturală, 123.456.789. Scăzând aceste numere unul din altul obținem: 864.197.532. Această diferență este un număr format tot din cele 9 cifre semnificative, dar într-o ordine diversă.

### *56. Alte exemple interesante cu cifrele de la 1 la 9*

Cu toate cifrele semnificative de la 1 la 9, *fără a se schimba ordinea lor naturală,* se obține numărul 100 prin simple operații aritmetice:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 x 9 = 100
1 + 2 x 3 + 4 x 5 – 6 + 7 + 8 x 9 = 100
1 + 2 x 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100
1 x 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9 = 100
12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100
123 – 45 - 67 + 89 = 100

### *57. Înmulțiri cu cifrele de la 1 la 9*

Se pot efectua înmulțiri, în care deînmulțitul, înmulțitorul şi cu produsul să fie formate la un loc din toate cifrele de la 1 la 9, luate o singură dată:

4 x 1.738 = 6.952
4 x 1.963 = 7.852
12 x 483 = 5.796
18 x 297 = 5.346
27 x 198 = 5.346
28 x 157 = 4.396
39 x 186 = 7.254
42 x 138 = 5.796
48 x 159 = 7.632

***58. Adunări de numere pare şi impare***

Dacă adunăm separat cifrele impare şi separat cele pare cuprinse în şirul de la 1 la 9 obţinem: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25, 2 + 4 + 6 + 8 = 20, deci două rezultate diferite. Există însă o posibilitate de a aşeza aceste cifre astfel încât rezultatele adunărilor să fie egale:

$$79+5+\frac{1}{3}=84\frac{1}{3},\quad 84+\frac{2}{6}=84\frac{1}{3}$$

***59. Iar de la 1 la 9***

Tot cu cifrele de 1 la 9, luate o singură dată, putem forma perechi de numere care, împărţite între ele, să ne dea drept cât numerele 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi 9. Iată-le şi pe acestea:

13.458 : 6.729 = 2,
17.469 : 5.823 = 3,
15.768 : 3.942 = 4,
13.485 : 2.697 = 5,
17.658 : 2.943 = 6,
16.758 : 2.394 = 7,
25.496 : 3.187 = 8,
57.429 : 6.381 = 9.

***60. În fine tot de 1 la 9***

Cu cifrele de la 1 la 9 luate o singură dată se poate face adunarea următoare:

$$\begin{array}{r} 15\ + \\ 36 \\ \underline{47} \\ 98\ + \\ \underline{2} \\ 100 \end{array}$$

***61. Când inversăm ordinea cifrelor la unele numere***

Priviţi următoarele trei perechi de înmulţiri:

| | | |
|---|---|---|
| 41 x 2 = 82, | 32 x 21 = 672, | 312 x 221 = 68.952, |
| 14 x 2 = 28, | 23 x 12 = 276, | 213 x 122 = 25.986. |

Se observă ceva deosebit la aceste înmulţiri şi anume: inversând ordinea cifrelor factorilor la fiecare din grupele de mai sus, s-au obţinut la produse numere formate din aceleaşi cifre aşezate însă şi ele într-o ordine inversată.

***62. Produse formate din aceleaşi cifre ale factorilor***

La înmulţirile 21 x 87 = 1.827 şi 27 x 81 = 2.187, puteţi observa că fiecare produs este format din aceleaşi cifre din care sunt formaţi şi factorii săi.

Produse din acest fel se pot găsi mai multe. Astfel:

465 x 831 = 386.415,  825 x 957 = 789.525,
902 x 875 = 789.250,  317 x 425 = 134.725,
681 x 759 = 516.879,  431 x 725 = 312.475 etc.

Nu se cunoaşte însă un alt caz similar cu acela al primelor două produse arătate mai sus, în care să avem două perechi de factori care să conţină aceleaşi cifre.

## *4.3 Pătrate şi cuburi curioase*

***63. Pătratul unui număr oarecare***

Pătratul oricărui număr se poate descompune în felul următor:

$1^2 = 1$

$2^2 = 1 + 3$

$3^2 = 1 + 3 + 5$

$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

.........................................

Observaţi că pătratul unui număr este egal cu suma atâtor numere impare câte unităţi are acest număr, luate din şirul natural de numere începând cu 1. Prin urmare, vom putea scrie:

$10^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$,

$13^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25$, şi aşa mai daparte.

Se poate demonstra că ceea ce am arătat aici este adevărat pentru orice număr.

***64. Pătratele unor numere formate din repetarea cifrei 1***

Să luăm toate numerele care se pot forma cu cifra 1, începând cu 1 şi terminând cu numărul format din repetarea cifrei 1 de nouă ori. Să efectuăm şi ridicarea la pătrat a acestor numere. Vom obţine:

$1^2 =$ 1

$11^2 =$ 121

$111^2 =$ 12.321

$1\,111^2 =$ 1.234.321

$11\,111^2 =$ 123.454.321

$111\,111^2 =$ 12.345.654.321

$1\,111\,111^2 =$ 1.234.567.654.321

$11\,111\,111^2 =$ 123.456.787.654.321

$111\,111\,111^2 =$ 12.345.678.987.654.32 1

Special nu am aşezat numerele care reprezintă pătratele, astfel încât să vină, unităţi sub unităţi, zeci sub zeci, sute sub sute etc. Am preferat să le aşezăm într-un triunghi isoscel spre a putea scoate în evidenţă simetria lor. Despre acest tablou de numere şi despre altele similare, care cuprind pătratele unor numere formate din aceeaşi cifră care se repetă, ne vorbeşte matematicianul arab Ibn-al-Barmma în

cartea sa „Talkhis'amali al Kassib" (*„Rezumatul analitic al operațiilor de calcul")* scrisă în sec. al XIII-lea.

### *65. Pătratele unor numere formate din cifrele 1 şi 0*

Luați numărul 121 şi intercalați succesiv între cifrele lui grupe de câte un zero, două zerouri, trei zerouri şi aşa mai departe. Veți obține următorul şir de numere: 121, 10201, 1002001, 100020001, 10000200001... Toate numerele formate în acest fel sunt pătrate perfecte, într-adevăr, dacă veți calcula, veți constata că:

$$\begin{aligned} 11^2 &= 121, \\ 101^2 &= 10.201, \\ 1001^2 &= 1.002.001, \\ 10001^2 &= 100.020.001, \\ 100001^2 &= 10.000.200.001, \ldots \end{aligned}$$

Observați că toate numerele care ne dau aceste pătrate sunt formate din doi de 1, între care sunt intercalate tot atâtea zerouri câte s-au intercalat între cifrele lui 121.

### *66. Pătratele unor numere formate din cifrele 2 şi 0*

De asemenea, pornind de la numărul 484 şi intercalând succesiv între cifrele 4 şi 8, precum şi între 8 şi 4, grupele 0, 00, 000 şi aşa mai departe se obține şirul de numere: 484, 40.804, 4.008.004, 400.080.004, 40.000.800.004,... care la fel sunt pătrate perfecte. Astfel: $22^2 = 484$, $202^2 = 40.804$, $2.002^2 = 4.008.004$, $20.002^2 = 400.080.004$, $200.002^2 = 40.000.800.004$,... Aici, toate numerele care ne dau pătratele pe care le-am format se scriu din doi de 2, între care s-au intercalat tot atâtea zerouri câte se cuprind între cifrele lui 484.

### *67. Ce devin pătratele unor numere formate din cifrele 1 şi 2 când acestea se răstoarnă*

Să efectuăm pătratele numerelor: 12, 112, 1.112, 11.112, 111.112 şi 1.111.112. Vom obține:

$$\begin{aligned} 12^2 &= 144 \\ 112^2 &= 12.544 \\ 1.112^2 &= 1.236.544 \\ 11.112^2 &= 123.476.544 \\ 111.112^2 &= 12.345.876.544 \\ 1.111.112^2 &= 1.234.569.876.544 \end{aligned}$$

Deocamdată, acest tablou de numere nu ne spune mare lucru, decât că toate pătratele încep cu 1 şi se termină cu 44. Cu puțină atenție putem constata ceva interesant la numerele de mai sus, şi anume: pătratul sumei cifrelor fiecărui număr este suma cifrelor pătratului său.

De exemplu: $(1 + 1 + 1 + 2)^2 = 1 + 2 + 3 + 6 + 5 + 4 + 4$ sau $5^2 = 25$. Mai departe, să răsturnăm acum numerele luate şi să efectuăm şi pătratele acestora, obținem:

$$21^2 = 441$$
$$211^2 = 44.521$$
$$2.111^2 = 4.456.321$$
$$21.111^2 = 445.674.321$$
$$211.111^2 = 44.567.854.321$$
$$2.111.111^2 = 4.456.789.654.321$$

Dacă de data aceasta comparăm acest tablou cu cel de mai sus, găsim o nouă particularitate a numerelor considerate: pătratul fiecărui număr este răsturnatul pătratului răsturnatului său. încercați să repetați: pătratul fiecărui număr... Puțin cam complicat, dar este interesant!

### *68. Ce se poate întâmpla cu pătratele unor numere formate din cifrele 1 şi 3*

Să luăm numerele: 13, 113, 1.113 şi 11.113, toate patru formate din cifrele 1 şi 3 şi să efectuăm pătratele lor. Vom avea:

$$13^2 = 169$$
$$113^2 = 12.769$$
$$1.113^2 = 1.238.769$$
$$11.113^2 = 123.498.769$$

După aceea, să răsturnăm cele patru numere luate şi să efectuăm şi pătratele lor.

$$31^2 = 961$$
$$311^2 = 96.721$$
$$3.111^2 = 9.678.321$$
$$31.111^2 = 967.894.321$$

Acum, cu puțină atenție, putem constata că cele patru numere considerate se bucură de aceleaşi particularități ca şi cele 6 numere formate din cifrele 1 şi 2 despre care am vorbit la problema precedentă.

Încercați şi veți vedea!

### *69. Pătratul unui număr format din repetarea cifrei 9*

Numerele care se pot forma prin repetarea cifrei 9 sunt: 9, 99, 999, 9.999... Dacă ridicăm la pătrat aceste numere, obținem:

$$9^2 = 81$$
$$99^2 = 9.801$$
$$999^2 = 998.001$$
$$9.999^2 = 99.980.001$$

Se observă că pătratele numerelor formate prin repetarea cifrei 9 prezintă următoarele particularități:

- toate cuprind cifrele 8 şi 1;
- începând de la pătratul lui 99, toate cuprind şi cifrele 9 şi 0;
- cifrele 9 şi 0 se scriu de atâtea ori câte cifre are numărul format prin repetarea cifrei 9, minus una.

Putem deci scrie deodată pătratul oricărui număr format prin repetarea cifrei 9. Astfel: $9.999.999^2 = 99.999.980.000.001$.

### *70. Pătrate formate din cele 10 cifre semnificative*

Se cunosc 11 numere ale căror pătrate sunt formate din cele 10 cifre, semnificative, luate o singură dată. Iată-le:

$$32.043^2 = 1.026.753.849$$
$$32.286^2 = 1.042.385.796$$
$$33.144^2 = 1.098.524.736$$
$$39.147^2 = 1.532.487.609$$
$$45.624^2 = 2.081.549.376$$
$$55.446^2 = 3.074.258.916$$
$$65.634^2 = 4.307.821.956$$
$$65.637^2 = 4.308.215.769$$
$$68.763^2 = 4.728.350.169$$
$$83.919^2 = 7.042.398.561$$
$$99.066^2 = 9.814.072.356$$

Tehnicienii care lucrează la verificarea maşinilor de calcul se folosesc în mod curent de aceste pătrate, care prin însăşi compoziția lor dau posibilitatea unei verificări fără erori.

### *71. Cuburile numerelor formate din cifra 9*

Am mai văzut care sunt numerele formate din cifra 9, atunci când am vorbit despre pătratele lor. Acum să ridicăm aceste numere la puterea a treia. Vom avea:

$$9^3 = 729$$
$$99^3 = 970.299$$
$$999^3 = 997.002.999$$
$$9.999^3 = 999.700.029.999$$

Ce constatăm privind acest tablou de numere? Cubul lui 9 este 729. Toate celelalte cuburi, ale numerelor alcătuite din repetarea cifrei 9, se formează intercalând între 7 şi 2 grupele 0, 00, 000 etc. şi aşezând înaintea primei cifre şi după ultima, grupele 9, 99, 999 ş.a.m.d. În felul acesta noi putem calcula deodată: $999.999^3 = 999.997.000.002.999.999$.

### *72. Cuburi interesante ale unor numere*

Iată o particularitate deosebită a cuburilor numerelor: 8, 17, 18, 26 şi 27. Ridicând la puterea a treia aceste numere, obținem:

$$8^3 = 512,\ 17^3 = 4.913,\ 18^3 = 5.832,\ 26^3 = 17.576,\ 27^3 = 19.683.$$

Privind cu atenție numerele 512, 4.913, 5.832, 17.576 şi 19.683, observăm:

$$8 = 5 + 1 + 2,\ 18 = 5 + 8 + 3 + 2,\ 17 = 4 + 9 + 1 + 3,$$
$$26 = 1 + 7 + 5 + 7 + 6,\ 27 = 1 + 9 + 6 + 8 + 3.$$

Adică, fiecare din cele cinci numere considerate este egal cu suma cifrelor, luate ca simple unități, ale cuburilor lor.

## *4.4 Numere trecute prin ciur*

***73. Despre numere compuse din alte numere***

Din cele mai vechi timpuri, matematicienii şi-au dat seama că toate numerele întregi mai mari ca 1 admit cel puțin doi divizori: numărul însuşi şi unitatea. De exemplu: numărul 7 se împarte exact prin 7 şi dă câtul 1; el se mai poate împărți exact prin 1 dând pe 7 ca rezultat. Tot astfel numărul 12 se împarte exact prin 12 şi 1, numărul 75 admite ca divizori pe 75 şi 1 şi aşa mai departe. Dar numărul 1, câți divizori admite? Se vede bine că numărul 1 nu poate admite decât un singur divizor, doar pe 1. Însă matematicienii vechi au mai constatat ceva: cele mai multe numere întregi, mai mari ca unitatea, au mai mult de doi divizori. Astfel sunt în primul rând toate numerele pare. Acestea, afară de faptul că se împart prin ei înşişi şi prin 1, se mai împart exact şi prin 2. Apoi sunt alte numere, cum este 12, care se mai împarte exact şi prin 3, 4 şi 6, sau 75 care este divizibil prin 3, 5, 15 şi 25 şi aşa mai departe.

Toate numerele care nu admit decât doi divizori, adică acelea care nu se pot împărți exact decât prin ei înşişi şi unitatea, se numesc *numere prime.* Prime sunt, de exemplu, numerele 2, 3, 5, 7,..., 19,..., 83,..., 173,... etc. Numerele care admit mai mult de doi divizori se numesc *neprime* sau *compuse.* Acestora li se spune compuse pentru că toate sunt compuse din produse de numere prime. Exemple de numere compuse sunt, cum am arătat mai sus toate numerele pare, toate numerele care se termină cu 5 pentru că acestea sunt divizibile prin 5 şi multe, foarte multe, infinit de multe alte numere. Deoarece numărul 1 nu admite decât un singur divizor, el nu este nici prim, nici neprim.

Descompunerea unui număr compus în factori primi se face într-un singur fel. Aceasta înseamnă că dacă numărul 28, care este un număr compus, admite ca factori primi pe 2 şi 7, adică 28 = 2 x 2 x 7, nu mai putem găsi alți divizori ai lui 28 care să fie numere prime. Putem scrie 28 = 2 x 14, dar 14 nu mai este număr prim.

***74. Despre ciurul lui Eratostene sau cum se pot găsi numere prime***

Până acum, nici prin gând nu ne-a trecut că numerele ar putea fi trecute printr-un ciur, astfel ca de o parte să rămână cele prime, iar de cealaltă numerele compuse. Poate, într-un viitor apropiat, se va putea face alegerea numerelor prime de cele neprime cu ajutorul calculatoarelor.

Deocamdată cunoaştem mica tabelă de numere prime, alcătuită, după cât se spune, de Eratostene, un matematician grec, care a trăit prin anii 276-193 î.e.n.

Iată cum se realizează o asemenea tabelă pentru numerele de la 1 la 160. Se scriu toate numerele în ordinea lor naturală de la 1 până la 100. Primul număr prim, pe care-l întâlnim în tabelă este 2. Toți multiplii lui 2, adică numerele 4, 6, 8,... fiind numere compuse le ştergem din tabelă. Trecem la 3, care este primul număr neşters după 2. Acesta nu a fost şters ca multiplu de 2 şi cum alt număr mai mic ca 3, în afară de 2, nu găsim în tabelă, rezultă că 3 nu se divide decât prin el însuşi şi unitatea. Deci 3 este număr prim şi nu-l vom şterge. Ştergem însă toți multiplii lui 3. Primul număr neşters după 3 este 5. Raționăm pentru 5 la fel ca pentru 3 şi ştergem

toate numerele care se termină cu 5, ele fiind multipli de 5 (cele terminate cu 0 le-am şters o dată cu toţi multiplii lui 2). Continuăm la fel pentru 7, 11, 13 şi aşa mai departe. După ce vom termina cu ştergerea numerelor compuse ne vor rămâne numai următoarele numere prime: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

De ce i se spune totuşi „ciur" tabelei lui Eratostene?

Iată de ce. Pe vremea lui Eratostene, nefiind încă descoperită hârtia, lucrările cu caracter definitiv se scriau pe papirus sau pe pergament. Calculele obişnuite, care aveau un caracter trecător, se scriau pe scândurele trase la rindea şi acoperite cu un strat subţire de ceară. Se scria zgâriind ceara cu vârful unui os ascuţit numit „stil". Dacă trebuia şters vreun număr, se punea deasupra acestuia un punct sub forma unei împunsături în stratul de ceară, în felul acesta, după terminarea alcătuirii unui tabel de numere prime, stratul de ceară apărea „ciuruit" de împunsături. De aici şi numele de „ciurul lui Eratostene".

### *75. Şirul numerelor prime este nesfârşit*

Marele învăţat Euclid a demonstrat, în urmă cu aproape 2.300 de ani, că şirul numerelor prime este nelimitat. Nu există un număr prim pe care să-l putem considera ca fiind cel mai mare. De la Euclid încoace, matematicienii din diverse epoci au tot căutat să găsească numere prime din ce în ce mai mari. Există tabele pentru toate numerele prime până la 10.000.000, dar se cunosc numere prime şi mai mari. Astfel, în anul 1883, Pervuşin, un matematician rus autodidact, a demonstrat că $2^{61} - 1 = 2.305.843.009.213.693.951$ este un număr prim. Mult timp acesta a fost considerat ca cel mai mare număr prim cunoscut.

În anul 1939 s-a descoperit însă un număr prim mai mare decât numărul lui Pervuşin. Este $2^{127} - 1$. Valoarea aproximativă a acestui număr uriaş este de 170.140 x $10^{33}$. Nu se cunoaşte un număr prim mai mare ca acesta. Se ştie numai că numerele: $2^{137} - 1$, $2^{139} - 1$, $2^{225} + 1$ şi $2^{257} - 1$ nu sunt numere prime. Aceste numere sunt extraordinar de mari. Astfel, penultimul, care este neprim, pentru că aşa cum a demonstrat Pervuşin în 1878, se împarte exact prin 167.772.161, conţine 2.525.223 cifre. Aceasta înseamnă că tipărit cu caractere obişnuite s-ar putea umple cu el o carte de 1.000 pagini. Rândurile acestei cărţi, puse cap la cap ar atinge lungimea de 5 km.

### *76. Cum sunt răspândite numerele prime*

Numerele prime sunt răspândite neuniform în rândul numerelor compuse. Astfel, între 0 şi 10 găsim 4 numere prime, între 30 şi 40 sunt 2, între 40 şi 50 sunt 3, iar de la 90 până la 100 nu întâlnim decât un singur număr prim. Între 100 şi 200 sunt 25 de numere prime, pe când între 900 şi 1.000 se găsesc numai 14. Tot astfel între 1.000.000 şi 2.000.000 întâlnim 78.498 numere prime, iar între 9.000.000 şi 10.000.000, adică tot la distanţa de un milion, găsim numai 62.090 numere prime.

Mai mult încă, această inegalitate de răspândire a numerelor prime devine mai interesantă când constatăm că există perechi de numere prime, care apar în şirul numerelor naturale, despărţite doar de un singur număr compus.

Exemple sunt multe: 3 şi 5, 5 şi 7, 11 şi 13, 17 şi 19 etc. Astfel de perechi de numere prime se numesc „gemene". Cele mai mari numere gemene cunoscute sunt perechea 10.016.957 şi 10.016.959. Legea distribuirii numerelor prime a devenit o importantă problemă a matematicii moderne. Mulți matematicieni de seamă au căutat să găsească o formulă cu ajutorul căreia să se poată determina, măcar aproximativ, câte numere prime există, de exemplu, în şirul numerelor naturale de la 1 până la 10.000.000 sau 100.000.000.

Pafnuti Lvovici Cebîşev (1821-1894) este considerat, după Lobacevski, ca cel mai mare matematician rus; a fost profesor universitar şi membru al Academiei din Petersburg şi Paris; a făcut cercetări în trigonometrie, matematici superioare şi mecanică; rezultatele descoperirilor sale le-a legat întotdeauna de practică; este primul şi poate singurul matematician care s-a ocupat de problema croitului hainelor; s-a mai ocupat de construcția morilor de vânt, de instalații industriale etc. şi este inventatorul unui mare număr de mecanisme) unul din cei mai mari matematicieni ai lumii, a reuşit, cu ajutorul metodelor din matematică superioară, să găsească formula pentru determinarea numărului de numere prime cuprinse între 1 şi un număr oarecare.

Formula găsită de Cebîşev dă rezultate foarte apropiate de exactitate. Rezultatele sunt cu atât mai exacte, cu cât este mai mare şirul de numere pornind de la 1, în care este cuprins numărul de numere prime pe care căutăm să-l aflăm. De exemplu, între 1 şi 1.000.000 există exact 78.498 numere prime, iar între 1 şi 10.000.000 întâlnim, tot aşa de exact, 664.579 numere prime. Dar, calculând cu formula lui Cebîşev găsim între 1 şi 1.000.000 mai mult cu 130 de numere prime, iar între 1 şi 10.000.000 mai mult cu 339. Aceasta înseamnă că diferența dată de formula lui Cebîşev în primul caz este de aproximativ 0,16%, iar pentru al doilea caz, când şirul numerelor se măreşte de zece ori, diferența rezultată este doar de 0,05%.

### *77. Fiecare număr par începând cu 6 este suma a două numere prime*

Pentru exemplificare dăm mai jos descompunerea primelor 10 numere pare, începând cu 6, în sume de două numere prime:

6 = 3 + 3
8 = 3 + 5
10 = 3 + 7 = 5 + 5
12 = 5 + 7
14 = 3 + 11 = 7 + 7
16 = 3 + 13 = 5 + 11
18 = 5 + 13 = 7 + 11
20 = 3 + 17 = 7 + 13
22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11
24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13

Matematicianul Georg Cantor, celebru prin teoria sa asupra „mulțimilor", a comunicat, la un congres ştiințific, un tablou în care se găsesc, pentru fiecare număr par până la 1.000, toate descompunerile în două numere prime. Afirmația din fruntea

acestui paragraf poartă numele de „supoziția lui Goldbach”, după numele celebrului matematician care a enunțat-o. Ea a fost verificată în 1940 până la numărul 100 000. Încă în anul 1742 marele matematician Euler a comunicat lui Goldbach, cu care era coleg de academie, că găseşte adevărată afirmația de mai sus, dar nu o poate demonstra. De la Euler încoace s-au făcut foarte multe încercări de a demonstra supoziția lui Goldbach, dar fără rezultat.

Din încercările matematicienilor s-a ajuns la concluzia că pentru rezolvarea acestei probleme sunt necesare metode noi în matematică. Matematicienii sovietici L.G. Schnirelman (1905-1938) şi, mai târziu, acad. I.M.Vinogradov au găsit şi dezvoltat noi metode de cercetare matematică care au avut o importanță generală în progresul matematicii.

### *78. Despre multiplu lui 6 şi numerele prime*

Iată ce mai putem constata la numerele prime:

$$
\begin{aligned}
5 &= 6 - 1 \\
7 &= 6 + 1 \\
11 &= 2 \times 6 - 1 \\
13 &= 2 \times 6 + 1 \\
17 &= 3 \times 6 - 1 \\
19 &= 3 \times 6 + 1 \\
61 &= 10 \times 6 + 1 \\
67 &= 11 \times 6 + 1 \\
113 &= 19 \times 6 - 1 \\
127 &= 21 \times 6 + 1
\end{aligned}
$$

Şi oricât de departe am merge cu numerele prime, am constata că orice număr prim, mai mare ca 3, este un multiplu de 6 mărit sau micşorat cu unitatea. Această particularitate a numerelor prime a fost observată de unul din cei mai mari matematicieni ai lumii, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716 filozof şi matematician german; extraordinar de precoce, cunoştea la vârsta de 15 ani limbile greacă şi latină; în acelaşi timp, el îşi formă o serioasă cultură modernă citind pe marii filozofi şi matematicieni; a studiat dreptul, filozofia, istoria, matematica şi ştiințele politice; la 20 de ani şi-a susținut teza de doctorat în ştiințe juridice; s-a ocupat cu studiile de matematici superioare şi alături de Newton este întemeietorul calculului diferențial şi integral; pe lângă alte lucrări a publicat în 1670 un tratat despre „Teoria mişcării abstracte şi teoria mişcării concrete”, iar în 1684 tratatul în limba latină „Nova methodus pro maximis et minimis”).

Până în prezent, nici acest adevăr care după cum am spus, se verifică la orice număr prim cunoscut, nu a putut fi demonstrat. S-ar putea spune că numerele prime se distrează punându-i în încurcătură pe matematicieni.

## *4.5 Curiozitățile unor fracții*

***79. Produse egale cu suma factorilor***

Există unele perechi de numere al căror produs este egal cu suma lor. Iată trei exemple cunoscute:

$$3 \times 1{,}50 = 3 + 1{,}50$$
$$11 \times 1{,}10 = 11 + 1{,}10$$
$$21 \times 1{,}05 = 21 + 1{,}05$$

Există o infinitate de perechi de acest fel, pe care le putem forma ținând seama de modul cum sunt alcătuite aceste numere. Astfel, dacă *a* este unul din numere, celălalt va fi $\frac{a}{a-1}$. Într-adevăr, vom avea: produsul $a \times \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$ şi suma $a + \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$. Înlocuind pe *a* cu orice număr doriți veți obține perechi de numere de felul celor de mai sus.

***80. Produse egale cu diferențele factorilor***

Mai există şi perechi de numere, care înmulțite între ele dau un produs egal cu diferența lor. În cazul acesta însă, unul din cei doi factori trebuie să fie neapărat fracție. Exemple:

$$1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$5 \times \frac{5}{6} = 5 - \frac{5}{6}$$
$$9 \times \frac{9}{10} = 9 - \frac{9}{10}$$
$$16 \times \frac{16}{17} = 16 - \frac{16}{17}$$

Astfel de perechi de numere se pot găsi oricât de multe şi iată de ce. în exemplele de mai sus se observă că numărătorul fracției este egal cu factorul întreg, iar numitorul ei este egal cu numărul întreg mărit cu o unitate. Se vede imediat că, indiferent care ar fi valoarea celor doi factori, atâta timp cât se păstrează această relație între ei, produsul lor va fi egal cu diferența lor. Dacă numim cu *m* factorul întreg, vom avea: $m \times \frac{m}{m-1} = m - \frac{m}{m+1}$, deoarece $m \times \frac{m}{m+1} = \frac{m^2}{m+1}$ şi $m - \frac{m}{m+1} = \frac{m^2}{m+1}$. Mai există şi alte produse egale cu diferențele factorilor:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{9} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{9} - \frac{1}{10}, \frac{1}{18} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{18} - \frac{1}{19}$$

Şi asemenea perechi de fracții putem găsi oricât de multe, căci vom avea totdeauna: $\frac{1}{m} \times \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$, deoarece:

$$\frac{1}{m} \times \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m(m+1)} \text{ şi } \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{m(m+1)}.$$

### *81. O simplificare interesantă, dar prea puțin... matematică*

Toată lumea ştie că atunci când avem de simplificat o fracție trebuie să împărțim numărătorul şi numitorul prin acelaşi număr. Sunt unele fracții la care se pot face şi altfel de simplificări cu rezultate exacte dar operând... mai puțin matematic. De exemplu, fracția $\frac{16}{64}$ se poate simplifica, după cum ştim prin 16 şi obținem: $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$. Dar dacă tăiem pe 6 de la numărător şi de la numitor, nu obținem tot $\frac{1}{4}$?! Deci: $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$, la fel: $\frac{19}{95}=\frac{1}{5}, \frac{26}{65}=\frac{2}{5}, \frac{49}{98}=\frac{4}{8}$. Bineînțeles că aceste tăieri de cifre nu le putem numi simplificări. Rezultatele obținute sunt însă juste, pentru că numerele alese îndeplinesc următoarele condiții: dacă cele trei cifre distincte care intră în compunerea numerelor din fiecare egalitate le însemnăm cu *a, b* şi *c,* atunci avem: $\frac{(ab)}{(bc)}=\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}$, când *b* este întreg, pozitiv şi egal cu $\frac{9ac}{10a-c}$.

### *82. O altă simplificare interesantă*

Fracția $\frac{12}{24}$ o putem simplifica cu 12 şi rezultă $\frac{1}{2}$ sau cu 6 şi atunci obținem $\frac{2}{4}$. Dar dacă la această fracție tăiem atât de la numărător, cât şi de la numitor cifra zecilor sau cifra unităților, nu obținem o fracție egală cu cea dată? Oricare profesor va avea dreptul să vă... „trântească" la matematică dacă ați prezenta asemenea simplificări. Desigur, veți protesta şi veți arăta că rezultatele sunt riguros exacte. Dar în zadar, pentru că simplificarea se face prin împărțirea exactă a numărătorului şi numitorului fracției cu acelaşi număr şi nu prin tăierea unor cifre.

Totuşi, la fel ca în exemplele arătate în paragraful precedent, şi aici rezultatele exacte obținute nu sunt simple coincidențe, ci au o explicație ştiințifică. Fiecare fracție este astfel aleasă încât unul din termenii ei este divizorul celuilalt, iar catul împărțirii acestor termeni este un număr mai mic decât 10. De asemenea produsul unităților sau al zecilor prin acel cât este şi el mai mic decât 10. De exemplu, la ultima fracție, 21 este divizorul lui 63, iar catul împărțirii lor este 3. înmulțind fiecare cifră a lui 21 cu 3 obținem 6 şi 3, adică numere mai mici decât 10. în felul acesta, atât cifra unităților cât şi cifra zecilor lui 63 este de trei ori mai mare ca cifra unităților şi, respectiv, cifra zecilor lui 21.

În concluzie, dacă am tăiat din fracția $\frac{63}{21}$ pe 3 şi 1 am obținut fracția $\frac{6}{2}$ care are valoarea 3, iar dacă am tăiat pe 6 şi 2 ne-a rămas fracția $\frac{3}{1}$ care are tot valoarea 3.

### *83. Nişte numere mixte sub radical*

Ştim că dacă sub un radical avem un număr mixt (întreg însoțit de o fracție), pentru a scoate întregii de sub radical trebuie să efectuăm o serie de operații: să transformăm numărul întreg într-o fracție cu acelaşi numitor, să adunăm fracțiile, să

cercetăm dacă noul numărător conține ca divizor un pătrat perfect şi numai dacă există un astfel de divizor îl scoatem de sub radical extrăgându-i rădăcina pătrată. Deci, o mulțime de operații...

Dar să vedem, dacă scoatem de-a dreptul întregii de sub radical, fără a mai efectua mulțimea de operații înşirate mai sus, greşim oare? Nu putem oare scrie deodată:

$$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}},\ \sqrt{5+\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}},\ \sqrt{9+\frac{9}{80}}=9\sqrt{\frac{9}{80}},$$
$$\sqrt{10+\frac{10}{99}}=10\sqrt{\frac{10}{99}},\ \sqrt{12+\frac{12}{143}}=12\sqrt{\frac{12}{143}}$$ etc.?

Bineînțeles, nu totdeauna se întâmplă acest lucru. Numărul de sub radical trebuie neapărat să fie de forma $n+\frac{n}{n^2-1}$, în care **n** este un număr întreg mai mare decât 1. În acest caz:

$$\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3-n+n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^2\cdot n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}.$$

# Capitolul 5 Şiruri de numere

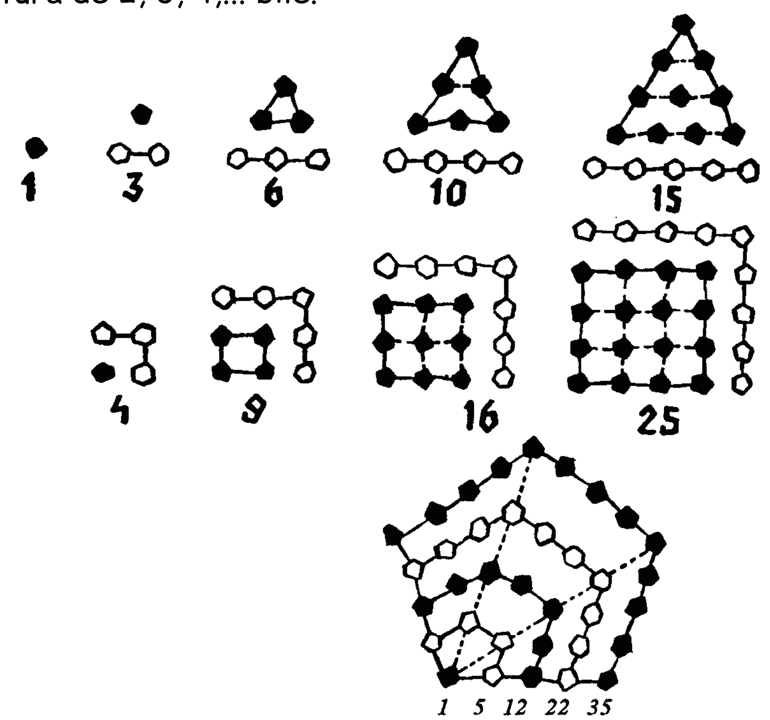
### 84. Despre ideea de „şir"

Vechii matematicieni greci nu cunoşteau şi nici riu s-au îngrijit să cunoască regulile de calcul aritmetice pe care noi le stăpânim astăzi. Posibilitățile oferite de abac satisfăceau în epoca aceea nevoile lor. Iar pitagoricenii, în special, nu se interesau deloc de calculul aritmetic pentru nevoile practice. Ei trăiau într-o lume aparte a cifrelor. Alături de pitagoriceni, discipolii filozofului Platon (427-347 î.e.n. filozof idealist, al Greciei antice) desconsiderau şi ei arta calculului fără de care noi n-am fi putut să avem astăzi o matematică aşa de dezvoltată.

Neinteresându-i găsirea unei tehnici mai avansate de calcul aritmetic, pitagoricenii se distrau cu figurile geometrice pe care le realizau aşezând bilele abacului în diverse moduri. Ei obțineau astfel triunghiuri, pătrate, pentagoane, hexagoane etc. Fiecărui poligon astfel construit i-au dat o denumire legată de numărul laturilor sale şi de numărul bilelor conținute într-o latură. Astfel, triunghiul 4 este un triunghi cu latura de 4 bile, pentagonul 8 este un pentagon cu latura de 8 bile şi aşa mai departe. Numărul bilelor conținute într-un triunghi era pentru ei *număr triunghiular,* cel al unui pătrat era numit un *număr pătrat,* numărul bilelor cuprinse într-un pentagon era un *număr pentagonal* etc.

În felul acesta au ajuns la descoperirea „numerelor poligonale", care se folosesc şi astăzi cu aceleaşi denumiri.

Fără să avem un abac la îndemână putem să construim şi noi asemenea figuri, înlocuind bilele abacului cu puncte negre sau albe, după nevoie, desenate pe hârtie. Primul triunghi, acela cu latura de o bilă, trebuie să-l construim dintr-un singur punct. Nici nu vedem cum l-ar fi putut construi altfel pitagoricenii. Restul sunt triunghiuri cu latura de 2, 3, 4,... bile.




***Numere triunghiulare, pătrate, pentagonale...***

Pentru formarea triunghiului cu latura de două bile am adăugat la primul încă două şi am obținut un total de 3 bile. Pentru triunghiul cu latura de 3 am mai adăugat la cel anterior încă 3 bile, rezultând în total 6 bile şi aşa mai departe. De fiecare dată deci, pentru a construi un nou triunghi trebuie să adăugăm la cel anterior câte un număr de bile. Dacă aşezăm numerele corespunzătoare fiecărui triunghi în ordinea în care ele s-au format, obținem şirul: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 ...

După cum vedem, aceste numere se succed după o lege bine stabilită. Fiecare număr este legat de vecinul său şi s-a născut din acesta după o anumită regulă. Matematicienii numesc totalitatea numerelor înşiruite după o anumită regulă pur şi simplu „şir", iar fiecare din aceste numere este un „termen" al şirului. Şirul de mai sus este deci „şirul numerelor triunghiulare". Acest şir se poate prelungi oricât, urmând regula bine stabilită a formării lui.

Să încercăm să formăm şi şirul numerelor pătrate. Primul pătrat, pentru motivul arătat la construirea triunghiunlor, va fi tot de o bilă. Pentru obținerea unui pătrat cu latura de 2 bile va trebui să adăugăm la cel precedent, la dreapta, jos şi într-un colț câte o bilă. Vom adăuga deci 3 bile şi vor rezulta în total 4. Mai departe, pentru pătratul următor, cu latura de 3 bile, va trebui să alăturăm câte 2 bile la două laturi adiacente ale pătratului anterior şi o bilă în colțul cuprins între aceste două laturi.

Pentru această operație, în desenul nostru, ne-am folosit tot de puncte albe. Am adăugat deci 5 bile şi am obținut un total de 9. Continuând în felul acesta, şirului de pătrate construite îi va corespunde şirul de numere: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 ..., adică chiar „şirul pătratelor" în ordinea lor crescătoare. La fel putem obține „şirul numerelor pentagonale", „şirul numerelor hexagonale", în fine, orice şir de numere poligonale.

Fără îndoială că vechii greci cunoşteau şi „şirul natural" al numerelor, adică şirul: 1, 2, 3, 4... 97, 98, 99, 100,..., 1.547, 1.548... Noi astăzi putem *lărgi* acest şir, adică putem, să-l începem cu *zero,* pentru că ne bucurăm de avantajul de a fi beneficiarii unei mari descoperiri a hinduşilor. La şirul natural al numerelor, vechii greci au adăugat încă două şiruri deduse din acesta: şirul numerelor cu soț şi şirul numerelor fără soț. După obiceiul lor, pitagoricenii le-au numit pe acestea: şirul fetelor şi şirul băieților, iar şirul natural care le-a generat, şirul părinților. în ordinea lor aceste şiruri se pot deci aşeza:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Părinți | 1 2 3 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9... |
| Fete | 2 4 6 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 ... |
| Băieți | 3 5 7 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19... |

Prin urmare fiecare fată din acest grup este „mai tânără" cu 2 ani decât sora ei mai mare cea mai apropiată, iar fiecare băiat este „mai tânăr" cu 2 ani decât fratele său mai mare cel mai apropiat. Astfel de şiruri au fost denumite în matematică „progresii aritmetice". Acestea sunt şiruri în care se porneşte de la un număr de „bază", iar fiecare termen se obține adăugând la vecinul său anterior câte o „rație" constantă. În şirul „părinților" baza este 1, iar rația tot 1. în şirurile fetelor şi băieților bazele sunt respectiv 2 şi 3, dar rația este aceeaşi, numărul 2. Progresii

artimetice putem forma oricât de multe. Este de ajuns să ne fixăm baza şi o rație. Astfel cu baza 5 şi rația 3 formăm progresia - 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 25, 28...

Pitagoricenii cunoşteau şi „progresiile geometrice", adică acele şiruri de numere în care termenii se obțin prin înmulțirea primului termen, numit „bază", cu puterile succesive ale aceluiaşi număr, numit „rație". Dar şi în studiile lor, făcute asupra acestor şiruri de numere, ei nu s-au îndepărtat de ideea obişnuită a „şirului părinților" şi a „şirului copiilor". De exemplu, progresia geometrică — 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 ... era de ei închipuită ca formată din două şiruri:

Părinți 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

Copii $2^1$ $2^2$ $2^3$ $2^4$ $2^5$ $2^6$ $2^7$ $2^8$ ...

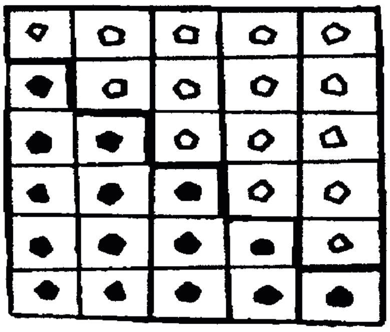
Şi progresii geometrice putem forma oricât de multe, dacă ne fixăm câte o bază şi câte o rație. De exemplu, cu baza 5 şi cu rația 3 obținem progresia geometrică: — 5, 15, 45, 135, 405, 1.215... În paragrafele următoare vom arăta unele particularități interesante ale şirurilor. Spre deosebire de pitagoriceni, care, consecvenți filosofiei lor, atribuiau şirurilor de numere proprietăți mistice, învățații de mai târziu au ştiut să folosească aceste proprietăți spre a împinge ştiința înainte. în mâinile pitagoricenilor însă, şirurile nu au dat nici un rezultat folositor.

Dacă în loc să caute să descopere proprietăți magice ale şirurilor, pitagoricenii ar fi aprofundat studiul lor, ei ar fi putut să ajungă la importante descoperiri matematice.

### *85. Suma unui număr de termeni din şirul natural*

Şirul natural al numerelor se poate prelungi oricât. Acelaşi lucru îl putem spune despre oricare şir. Dacă prelungim un şir la infinit şi facem suma termenilor săi, formăm o *serie.* Dar noi putem limita numărul termenilor unui şir făcând apoi suma lor. Pentru aceasta însă nu trebuie să adunăm termen cu termen, căci aritmetica ne pune la dispoziție formule destul de simple, deduse prin metodele pe care le are la dispoziție. Noi vom prezenta aici o metodă foarte veche, dar interesantă, pentru aflarea primelor *n* numere întregi consecutive din şirul natural. Pentru aceasta ne trebuie o hârtie împărțită în careuri.

Dacă ne propunem să aflăm, de exemplu, suma primelor 5 numere consecutive din şirul natural, vom proceda în felul următor: în partea stângă a figurii vom însemna cu puncte negre, în ordinea lor, primele cinci numere consecutive, iar în partea dreaptă a figurii, simetrică cu prima, vom aşeza aceleaşi cinci numere însemnate cu puncte albe. Vom obține astfel un dreptunghi cu laturile 5 x 6 = 30 puncte.



Cum suma S care trebuie aflată, reprezintă jumătate din acest dreptunghi, vom avea: $S = \frac{5 \times 6}{2} = 15$. Acest rezultat este valabil pentru orice număr *n* de termeni ai şirului.

În cazul nostru, 5 este numărul termenilor, adică *n*, iar 6 va fi *n + 1*. Deci, în general, suma primelor *n* numere întregi consecutive se va putea afla cu formula: $S = \frac{n(n+1)}{2}$. De exemplu, suma numerelor de la 1 până la 50 va fi: $\frac{50 \times 51}{2} = 1.275$.

Suma primilor termeni ai şirului natural al numerelor prezintă următoarele particularităţi interesante:

Suma termenilor echidistanţi este aceeaşi şi este mai mare cu o unitate decât ultimul termen. De exemplu, dacă limităm numărul termenilor la 10, şirul va fi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Vom avea totdeauna 10 + 1 = 9 + 2 = 8 + 3 = ... = 11.

Dacă numărul termenilor şirului este impar, termenul mediu este egal cu semisuma termenilor echidistanţi. De exemplu, când seria are 15 termeni, termenul mediu este 8 şi atunci:

$$\frac{15+1}{2} = \frac{14+2}{2} = \frac{13+3}{2} = \ldots = 8.$$

Când şirul are 10, 100 sau 1 000 de termeni, atunci:

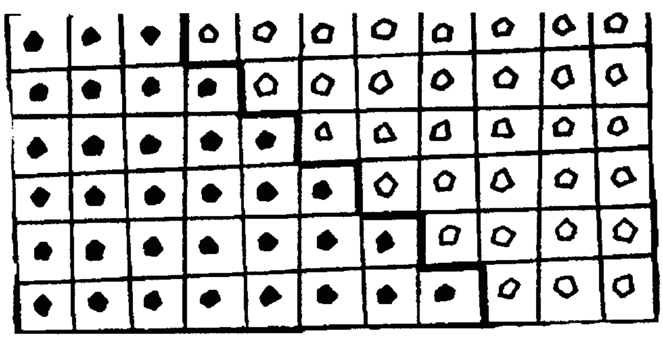
suma formată din primele 10 numere = 55
suma formată din primele 100 numere = 5.050
suma formată din primele 1 000 numere = 500.500

Aceste rezultate se explică foarte uşor dacă observăm că suma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 se mai poate scrie şi în felul următor: (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) = 5 x 11 = 55.

***86. Suma unui şir de numere consecutive începând cu un număr oarecare***

Folosind o metodă similară cu aceea din problema precedentă, putem găsi suma unui şir de numere întregi şi consecutive începând cu un număr oarecare. Să aflăm, de exemplu, suma numerelor întregi şi consecutive de la 3 la 8.

În acest scop, pe o hârtie împărţită în careuri la fel ca mai sus, însemnăm cu puncte negre numerele de la 3 la 8 în partea stângă a figurii, iar în partea dreaptă, simetrică cu prima, aşezăm aceleaşi numere însemnate cu puncte albe, însă în ordine inversă, de la 8 până la 3. Acest dreptunghi are în fiecare rând 3 + 8 = 11 puncte. Deoarece dreptunghiul cuprinde 6 rânduri, numărul total al punctelor va fi: 6(3 + 8) = 66.



Suma S pe care ne-am propus s-o aflăm cuprinde jumătate din numărul punctelor desenate, adică $S = \frac{6(3+8)}{2} = 33$. Aceasta este metoda pe care o foloseau vechii matematicieni pentru a demonstra cu ajutorul abacului formula $S = \frac{n(a+l)}{2}$ cunoscută de noi din aritmetică. În această formulă *a* este primul termen al şirului considerat, *l* ultimul termen, iar *n* este numărul total al termenilor pe care ne-am propus să-i însumăm.

Să încercăm să aplicăm această formulă pentru aflarea sumei numerelor întregi consecutive de la 18 până la 75. Sunt în total 58 de numere. Deci, $S = \frac{58(18+75)}{2} = 2697$.

Să aflăm suma primilor 15 termeni ai unei progresii aritmetice cu baza 4 şi cu raţia 7. Nici nu avem nevoie să scriem toţi termenii, adăugând succesiv raţia, pentru a afla ultimul termen pe care trebuie să-l introducem în formulă. Este deajuns să ne gândim că pentru a ajunge la el, trebuie să adăugăm la bază de atâtea ori raţia, câţi termeni are seria minus unul. Prin urmare, dacă însemnăm raţia cu *r*, ultimul termen va fi $l = (n-1)r$. Pentru calculul nostru vom avea deci: $a = 4, n = 15, l = (15-1)7 = 98$, iar $S = \frac{15(4+98)}{2} = \frac{15 \times 102}{2} = 765$.

### *87. O progresie aritmetică curioasă*

Să luăm progresia: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81. Ea începe cu 9, are raţia 9 şi cuprinde 9 termeni. Dacă scriem deasupra fiecărui termen al progresiei zecea (multiplu de 10) superioară şi dedesubtul lui numărul de ordine respectiv al termenului:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9, |

observăm că fiecare număr de ordine este diferenţa între zecea superioară şi termenul respectiv al progresiei, astfel: 3 = 30 - 27, 5 = 50 - 45, 6 = 60 - 54, 8 = 80 - 72.

### *88. Ce i s-a putut întâmpla maharajahului din Bassora, care nu a cunoscut progresiile geometrice*

Maharajahul din Bassora, vrând să angajeze ca matematician al curţii pe cabalistul şi matematicianul Nuredin, i-a cerut acestuia să-şi fixeze salariul. Nuredin a acceptat, şi şi-a fixat ca salariu pentru prima zi a lunii, cea mai mică monedă indiană, care ar corespunde cu banul nostru, pentru a doua zi 2 monede, pentru a treia zi 4 monede, şi aşa mai departe, numărul bănuţilor dublându-se în fiecare zi.

Maharajahul, căruia i se păruse la începutul lunii că poate avea la dispoziţia sa un învăţat pe un preţ de nimic, fu surprins când „ministrul său de finanţe" i-a arătat că Nuredin primise în cele 31 de zile ale lunii 2 147 483 647 bănuţi, adică în moneda noastră, frumoasa sumă de 21 474 836,47 lei. Legenda spune că acest lucru s-a

putut întâmpla numai pentru că maharajahul n-a ştiut că $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots 2^{29} + 2^{30} = 2.147.483.647$ sau mai bine zis, maharajahul nu a cunoscut progresiile geometrice.

Suma primită de Nuredin a putut să pară surprinzător de mare maharajahului, dar nu nouă care ştim că termenii unei progresii geometrice cresc foarte repede datorită înmulţirilor succesive. Ca să efectuăm suma de mai sus ar trebui să ridicăm fiecare termen al progresiei la puterea indicată de exponentul respectiv şi apoi să facem adunarea: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + ... + 536.870.912 + 1.073.741.824, adică o mulţime de înmulţiri şi apoi o adunare foarte lungă.

Ştiinţa care totdeauna vine în ajutorul nostru şi ne arată căile cele mai practice pentru rezolvarea problemelor noastre ne oferă, pentru aflarea sumei termenilor unei progresii geometrice, următoarea formulă foarte simplă: $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$, unde: *S* suma termenilor progresiei geometrice, *a* baza progresiei geometrice, *q* raţia progresiei geometrice, *n* numărul termenilor din progresia geometrică pe care-i însumăm.

În problema noastră avem: $\begin{cases} a = 1, q = 2, n = 31, \text{iar} \\ S = \frac{1 \cdot (2^{31} - 1)}{2 - 1} = 2^{31} - 1 = 2.147.483.647 \end{cases}$.

### *89. Despre Fibonacci şi numerele lui*

Despre Fibonacci am mai vorbit atunci când am arătat cum au făcut cunoştinţă europenii cu aşa zisele cifre arabe, care în realitate sunt de origine hindusă. Numele adevărat al acestui savant a fost Leonardo da Pisa, iar Fibonacci este o poreclă la care a ajuns el singur, prescurtând pe „filius Bonacci", adică fiul lui Bonacci. Tot ce a învăţat Fibonacci despre numere cu ocazia călătoriilor sale, şi tot ce a mai descoperit el însuşi, a strâns în cartea sa pe care a numit-o *„Liber abacei".*

Fibonacci a terminat de scris această voluminoasă lucrare în anul 1202, într-o primă formă, dar până la noi nu a ajuns decât varianta a doua, apărută în anul 1228. Cartea cuprinde aproape tot ce se cunoştea pe vremea aceea din aritmetică şi algebră şi este ilustrată cu un mare număr de probleme. Una din ele este celebra „problemă a iepurilor de casă". Iată enunţul şi rezolvarea problemei aşa cum le-a expus Fibonacci: *„Câte perechi de iepuri se nasc într-un an dintr-o singură pereche de iepuri".*

Pentru a afla câte perechi de iepuri se nasc într-un an, cineva a aşezat o pereche de iepuri într-un loc îngrădit cu zid, ştiind că după o lună, o pereche de iepuri aduce pe lume o altă pereche, iar iepurii încep să dea naştere la pui, de la vârsta de o lună. Deoarece prima pereche dă în prima lună descendenţi, perechea se dublează şi în această lună se obţin două perechi; dintr-acestea, o pereche, şi anume prima, va da descendenţi şi în luna următoare, astfel încât în luna a doua vor fi trei perechi; în luna următoare, două perechi vor avea descendenţi, astfel încât în luna a treia se mai nasc două perechi de iepuri şi numărul de perechi de iepuri din această lună este de 5.

Dintr-acestea în aceeaşi lună vor avea urmaşi trei perechi, iar numărul perechilor de iepuri în luna a patra va fi de 8; apoi, cinci perechi vor da naştere la alte cinci perechi care adunate cu cele opt perechi constituie 13 perechi în luna a cincea; dintr-acestea, 5 perechi născute în această lună nu au descendenți în aceeaşi lună, iar restul de 8 perechi vor avea descendenți; în acest fel, în luna a şasea vor fi 21 perechi; acestea din urmă, plus 13 perechi care se vor naşte în luna a şaptea, fac 34 perechi; adunate cu 21 perechi care se vor naşte în luna a opta, fac 55 perechi etc; raționând în felul acesta obținem că numărul de perechi produs dintr-o singură pereche, într-un loc îngrădit la sfârşitul unui an este de 377.

Prin urmare, după socoteala lui Fibonacci, putem obține următorul şir de numere: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 ... care este astfel format, încât fiecare din aceste numere se naşte din adunarea celor două numere precedente. De exemplu, 13 = 5 + 8, 89 = 34 + 55, 34 = 13 + 21, 377 = 144 + 233. În cinstea lui Fibonacci, şirul de numere descoperit de el poartă numele de *şirul lui Fibonacci.*

De şirul lui Fibonacci s-au ocupat mai mulți matematicieni. Ei au găsit că numerele din acest şir au proprietăți interesante şi atractive de care s-au legat o serie de probleme de matematică. Există multe fenomene naturale în care intervine şirul lui Fibonacci. Astfel, dispoziția frunzelor pe tijele unor plante, modul în care cresc fructele de brad etc, urmează aceeaşi regulă a numerelor din şirul lui Fibonacci.

### *90. O proprietate curioasă a numerelor lui Fibonacci*

Să aşezăm numerele lui Fibonacci într-o coloană. Într-alta, alăturată, să înşirăm din nou aceste numere, însă începând cu al doilea termen din şir. În felul acesta, pe orice rând orizontal care taie aceste coloane vom găsi doi termeni succesivi din şirul lui Fibonacci. Pentru identificare, notăm oricare număr din prima coloană cu A şi din a doua cu B. Apoi, luând câte o pereche de termeni consecutivi din şir, să calculăm raportul primului la al doilea şi raportul celui de al doilea la primul, adică A/B şi B/A. Rezultatele obținute din calcule să le aşezăm într-un tabel ca cel de mai sus, în care aceste rezultatele sunt reprezentate cu cel mult zece zecimale.

Să luăm acum din tabel câte 2 perechi de termeni consecutivi ai şirului, şi aşezați pe aceeaşi orizontală, de pildă 8, 13 şi 13, 21. Pentru raportul $\frac{8}{13}$, avem numărul 0,6153846153.

Pentru raportul $\frac{21}{13}$, găsim numărul 1,6153846153. Observăm că diferența dintre numerele acestei perechi este totdeauna egală cu unitatea. Astfel:

1,6153846153 - 0,6153846153 = 1 şi aşa mai departe. Interesant este că între aceste rapoarte ale numerelor lui Fibonacci regăsim unul foarte apropiat de un celebru număr din antichitate şi care din timpuri imemorabile poartă denumirea de *număr de aur:* 1,61803398875 ...

Despre acest număr se ştie că între el şi inversul lui există o diferență de o unitate, adică:

$$\frac{1}{1{,}61803398875} = 0{,}61803398875 \text{ sau } 0{,}61803398875 \ldots \times 1{,}61803398875 \ldots = 1.$$

Este, de altfel, singurul număr pozitiv care se bucură de această particularitate. Dar nu pentru aceasta i se spune număr de aur. Istoria lui este alta. Arhitecții Greciei antice, atunci când au ajuns la apogeul creației lor, au găsit o anumită proporție între dimensiunile golurilor uşilor şi ferestrelor care, după părerea lor, a corespuns foarte bine cerințelor esteticii. Aceste goluri se încadrează în dreptunghiuri ale căror laturi stau în raportul de $\frac{1}{1{,}618}$ sau $\frac{0{,}618}{1}$, adică dreptunghiuri la care înălțimea este de 1,618 ori mai mare ca lățimea.

Golurile pentru circulația oamenilor, a luminii şi aerului, tăiate în zidurile clădirilor după dreptunghiuri având un asemenea raport între laturi, s-au numit *tăieturi de aur*. Numărul care arată de câte ori o latură este mai mare decât cealaltă a devenit *număr de aur*. Incontestabil că monumentele clasice greceşti sunt de o frumusețe şi armonie desăvârşită, dar de la crearea lor până în prezent s-au mai executat multe opere arhitectonice mărețe şi cu tăieturi în ziduri cu rapoarte foarte variate între dimensiuni şi totuşi foarte armonioase. Dar nici un număr corespunzător acestor rapoarte nu este *număr de aur*.

### *91. Şirul format din pătratele numerelor naturale*

Dacă ridicăm la pătrat numerele întregi în ordinea lor naturală obținem următorul şir: $1^2$, $2^2$, $3^2$, $4^2$, $5^2$ ... adică: 1, 4, 9, 16, 25 ... Suma termenilor acestui şir prezintă o particularitate interesantă. Astfel:

dacă limităm şirul la 10 termeni S = 55 x 7
dacă limităm şirul la 100 termeni S = 5.050 x 67
dacă limităm şirul la 1000 termeni S = 500.500 x 667

### *92. Şirul cuburilor numerelor naturale*

Şirul numerelor naturale ridicate la cub are următorii termeni: $1^3$, $2^3$, $3^3$, $4^3$, $5^3$... sau 1, 8, 27, 64, 125 ... Aici, dacă însumăm termenii şirului, găsim o particularitate şi mai interesantă. Iată:

limitând şirul la 10 termeni 5 = 55 x 55
limitând şirul la 100 termeni 5 = 5.050 x 5.050
limitând şirul la 1.000 termeni 5 = 500.500 x 500.500

Suma de va avea aceeaşi formă dacă limităm şirul la 10.000, 100.000 ... termeni. Această particularitate rezultă din faptul că suma cuburilor numerelor din şirul natural este egală cu pătratul sumei numerelor din acest şir. Adică:

$$1^1 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

### *93. Alte şiruri interesante*

Şiruri se pot obține infinit de multe, căci infinit este modul în care putem aşeza numerele astfel ca ele să se succeadă după anumite reguli. Dar matematica nu le reține pe toate pentru că nu toate sunt folositoare. Din cele care se folosesc în mod curent în matematică vom menționa două mai interesante.

*Seria armonică.* Este o serie formată din numere fracționare şi anume din inversele numerelor naturale: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$ Acestei serii i se spune *armonică* pentru că fiecare termen al ei este medie armonică a celor doi termeni vecini. Toți termenii unei serii armonice sunt fracții ale căror valori sunt cuprinse între 0 şi 1. În general inversele numerelor se folosesc mult în calculele aritmetice.

Când avem de împărțit un număr, de exemplu prin 157 este mult mai comod şi expeditiv să-l înmulțim cu $\frac{1}{157}$, adică cu 0,006369. Totul este să avem gata calculate inversele uzuale.

Când avem de efectuat suma mai multor termeni care fac parte din seria armonică, în loc să adunăm atâtea fracții pe care trebuie să le aducem la, acelaşi numitor, preferăm să însumăm inversele numerelor luate din tabele special întocmite. Suma primilor zece termeni ai şirului de mai sus este: 2,928968253968253... însumând primii o sută de termeni, obținem numărul: 5,18737752 ..., iar pentru prima mie de termeni, suma ne dă: 7,48429034 ...

Există şi o formulă, descoperită de marele matematician Euler care ne dă posibilitatea să calculăm suma oricărui număr de termeni ai seriei armonice. însumând primul miliard de termeni se obține: 21,300481502..., pe când suma primului miliard de termeni ai şirului natural, calculată cu formula pe care noi o cunoaştem, ne dă: 500.000.000.500.000.000.

Ce ne spun cele cinci numere de mai sus?

Suma termenilor seriei formată din numerele naturale cât şi suma termenilor seriei formată din inversele lor pot creşte oricât, dar a doua *creşte foarte încet.* Aceasta înseamnă că este deajuns să adunăm un număr suficient de mare de termeni ai acestor serii şi putem găsi un număr *oricât de mare am voi.*

Seriile de acest fel la care suma termenilor nu se poate limita se numesc serii *divergente.*

Altfel stau lucrurile cu seria numită „e". ***Seria*** „e" are ca termeni tot inversele unor numere, dar grupate într-un anumit mod. Iată cum se prezintă seria aceasta: $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+...$ Se vede deci că termenii seriei „e" sunt inversele unor numere, şi anume, din primul număr al şirului natural, apoi din produsul primelor două numere din acest şir, pe urmă din produsul primelor trei numere şi aşa mai departe.

Când efectuăm produsul unui şir de numere naturale începând cu 1 până la un anumit număr, spunem că facem „factoria-lul" acelui număr.

De exemplu: factorial de 4: 4 = 1 x 2 x 3 x 4, factorial de 7: 7 = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7, şi aşa mai departe. Factorialul unui număr se înseamnă pe scurt cu semnul ! pus alături de acel număr, adică putem scrie: 5! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5, 8! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8. Deci semnul **!** aşezat la dreapta unui număr ne spune:

„Fiți atenți, vine un şir de înmulțiri de numere consecutive, începând cu 1 până la numărul lângă care stau eu!"

Prin urmare, utilizând simbolul factorial, seria „e" se poate scrie sub forma: $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+...$ Dacă privim seria „e" sub forma pe care am arătat-o la început, observăm că am scris de două ori termenul $\frac{1}{1}$, pe când în forma cu factoriali, în locul primului termen $\frac{1}{1}$ apare $\frac{1}{0!}$.

Aici nu există nici o confuzie, căci adevărata definiție a seriei „e" spune că aceasta este seria inverselor factorialilor în ordinea lor naturală. Deci trebuie să începem cu 0!. Dar cât este factorial de zero? „Cum, factorial de zero?!? - veți răspunde foarte mirați - factorial de zero ... este tot zero 1". Nu-i adevărat! În matematică s-a stabilit prin convenție că 0! = 1. Suntem obligați să ne ținem de această convenție, căci altfel, tot ce ne învață matematica despre factorialul unui număr nu ar mai fi adevărat.

Acum, revenind la seria noastră, observăm că putem să adăugăm oricâți termeni vrem la dreapta ei, adică o putem prelungi la infinit. însă, pe măsură ce o prelungim, se formează un nou termen cu un nou numitor. Fiecare nou numitor este precedentul, înmulțit cu un număr din ce în ce mai mare. De aceea şi valoarea termenilor acestei serii descreşte foarte repede. Când facem suma termenilor unei serii însumăm infinit de mulți termeni. Cu alte cuvinte, adunăm atât de mulți termeni încât numărul lor este mai mare decât orice număr oricât de mare l-am putea închipui noi. În cazul nostru ultimul termen închipuit, având un numitor infinit de mare, tinde să devină egal cu zero.

Matematicienii au demonstrat că seria despre care vorbim este *convergentă,* adică suma termenilor ei are o valoare finită şi determinată. Această valoare este un număr incomensurabil ale cărui prime 25 de cifre sunt următoarele: 2,718281828459045235360287... Punctele de la dreapta numărului arată că el se poate prelungi oricât de mult.

Ilustrul matematician Euler a dat în anul 1731 acestui număr numele de „e", după cum tot el a numit numărul 3,14... cu numele de $\pi$. De aceea şi seria care dă acest număr s-a numit seria numărului *e.* Descoperitorul ei este savantul englez John Neper, inventatorul logaritmilor. El a luat chiar numărul „e" ca bază a primului său *sistem de logaritmi.* Un matematician - Lehmer - a calculat primele 707 zecimale ale numărului „e", dar nu ştim la ce i-au putut folosi. în mod obişnuit se întrebuințează acest număr cu maximum 10 - 12 cifre. Se dau în diverse limbi diferite fraze pentru reținerea unui număr oarecare de cifre ale lui e. Numărând literele cuvintelor frazei se obțin cifrele numărului. Astfel, pentru primele 10 cifre zecimale ale numărului „e" există în limba română fraza următoare:

Tu voieşti a reaminti de valoarea
2 7 1 8 2 8
*e* obținută cu literele date
1 2 8 4

Ne îndoim dacă în vreo altă limbă s-ar fi putut alcătui fraze pentru mai mult de 12 zecimale, căci a treisprezecea zecimală fiind un zero, nu ştim cum s-ar putea găsi un cuvînt cu... zero litere.

# ***Capitolul 6*** *Probleme asupra numerelor*

***94. 7 din şapte de 7***

Cu şapte de 7 putem forma un 7?

***95. 8 din cinci de 5***

Cum putem aşeza cinci de 5 pentru a obține un total de 8?

***96. 9 din toate cifrele şirului 1...9***

Cum putem aşeza toate cifrele şirului de la 1 la 9, fără repetiție, pentru a obține 9?

***97. Tot 9, dar din cifrele şirului 1...10***

Din toate cifrele şirului de la 1 la 10, tară repetiție, putem forma 9?

***98. 11 din şapte de 1***

Încercați să scrieți numărul 11 cu şapte de 1.

***99. 12 din şase de 1***

Cum putem aşeza şase de 1 pentru a obține 12?

***100. Din cifre impare***

Formați numărul 14 cu cinci cifre impare.

***101. 20 din patru de 9***

Cu patru de 9 să formați numărul 20.

***102. Cu trei cifre identice***

Se poate scrie numărul 24 cu trei cifre identice? Arătați cum? Se exclude soluția: 8 + 8 + 8 = 24.
(22 + 2 = 24;   $3^3$-3 = 24)

***103. Iar cu trei cifre identice***

Exprimați numărul 30 prin trei cifre identice.

***104. Cu patru de 9***

Se poate forma 100 cu patru de 9?

***105. Trei de 4 să facă 252***

Ştiți să aşezați trei de patru astfel ca să vă dea 252?

***106. 1000 din opt de 8***

Am opt de opt şi vreau să fac din ei o mie.

***107. O problemă cu două jumătăţi***

Cât face o jumătate împărţită la o jumătate?

***108. O problemă cu cifre şterse***

Cineva a făcut o înmulţire pe o bucată de hârtie pe care a mototolit-o şi a băgăt-o în buzunar. După un timp oarecare, având nevoie de această socoteală, a observat că o bună parte din cifre s-au şters, înmulţirea prezentându-se ca mai jos, unde am înlocuit cifrele şterse cu steluţe.

$$\begin{array}{r}
3**\\
*3*\\
\hline
**9*\\
*45\phantom{*}\\
**6*\phantom{**}\\
\hline
**\;***0
\end{array}$$

Totuşi omul nostru a reuşit până la urmă să reconstituie înmulţirea, servindu-se numai de cifrele rămase şi de urmele cifrelor şterse. Cum a procedat?

Probleme de genul celei de mai sus fac parte din grupul problemelor de *Criptarimetrie.* La aceste probleme se înlocuiesc, în total sau în parte, cifrele prin semne sau litere şi se cere restabilirea calculului prin raţionamente matematice bazate pe proprietăţi ale numerelor sau operaţiilor pe care le facem. Dificultatea în rezolvarea unora din aceste probleme constă în şirul lung de raţionamente care trebuie făcute pentru reconstituirea operaţiilor. De aceea ele cer foarte multă atenţie. Dificultăţile cresc o dată cu gradul operaţiei de reconstituit. Astfel, este mai uşor de reconstituit o înmulţire decât o împărţire sau o împărţire decât o extragere de rădăcină pătrată.

Pentru a da un exemplu de împărţire, reproducem din „Culegerea de probleme de aritmetică" a lui Ion Ionescu următoarea problemă: *Să se restabilească împărţirea următoare la care nu cunoaştem decât a doua cifră a catului* 7. Steluţele indică cifrele necunoscute:

$$\begin{array}{l|l}
******* & *** \\
\cline{2-2}
**** & *7*** \\
\cline{1-1}
\phantom{**}*** & \\
\phantom{**}*** & \\
\cline{1-1}
\phantom{**}**** & \\
\phantom{***}*** & \\
\cline{1-1}
\phantom{****}**** & \\
\phantom{****}**** &
\end{array}$$

La ultima scădere s-au coborât deodată două cifre de la deîmpărțit. Aceasta dovedeşte că penultima cifră a catului este un 0. Produsul parțial prin 7 are trei cifre; el se scade dintr-un număr de trei cifre şi dă un rest de trei cifre. Produsul următor parțial are tot trei cifre, se scade dintr-un număr de patru cifre şi dă un rest de două cifre:,deci acest produs parțial este mai mare decât cel care corespunde lui 7. Deci, după 7 la cât vine 8 sau 9.

Cum însă primul şi ultimul produs parțial au câte patru cifre, reiese că acestea se datoresc cifrei 9 şi rămâne ca după 7 să vină un 8. Cu modul acesta catul este neapărat 97.809. Produsul parțial prin 8 având numai trei cifre, împărțitorul este inferior lui 1.000/8 = 125. Cum împărțitorul are trei cifre, se vede că prima cifră a lui este 1. Cum şi 125 x 9 = 1.125 < 2.000, rezultă că produsele parțiale prin 9 încep cu 1. Introducând valorile găsite până aci, în schema de calcul dată, obținem:

```
*******      | 1**
1***         |)97809
-------
  ***
  ***
-------
  ****
   ***
-------
    1***
    1***
```

Produsul parțial prin 8 se scade din cel puțin 1.000 şi dă cel mult restul 19. Prin urmare acel produs parțial este cel puțin 1.000 - 19 = 981. Deci împărțitorul este cel puțin 981/8 = 122,6. Fiind întreg este cel puțin 123. Am arătat însă că împărțitorul este sub 125: deci nu ar putea fi decât 123 sau 424. Produsele parțiale prin 9 ar putea fi numai 123 x 9 = 1.107 sau 124 x 9 = 1.116. Cifra sutelor lui este deci neapărat 1. Restul pe care-l dă produsul parțial prin 8 este deci 11 şi prin urmare acel produs este cel puțin 1000 - 11= 989. Împărțitorul este deci cel puțin 989/8 = 123,6. Deducem de aici că împărțitorul este 124 şi că deci deîmpărțitul este 124 x 97.809 = 12.128.316. O verificare este necesară, întrucât nu am utilizat toată schema dată. Efectuăm calculul:

```
12128316     | 124
1116         |)97809
--------
  968
  868
--------
  1003
   992
--------
    1116
    1116
```

# *Capitolul 7* Numere uriaşe

### *109. Câteva numere*

Cu cât ne depărtăm de numerele cu care ne-am obişnuit să operăm zilnic, sau periodic, cu atât ideea noastră despre un număr mare devine mai nebuloasă, deoarece noi pierdem în astfel de împrejurări puterea de apreciere a unității de măsură. Concepția pe care un om şi-o poate forma despre numerele foarte, foarte mari, despre numerele uriaşe, este relativă şi de multe ori vagă.

*Anul Lumină,* întrebuințat în astronomie drept unitate de măsură pentru evaluarea distanțelor interastrale, constituie ceva obişnuit pentru un astronom. Pentru un profan în materie, neobişnuit a gândi *astronomiceşte* anul lumină reprezintă ceva mult, foarte mult chiar, şi uneori ceva imposibil de imaginat. Oamenilor neobişnuiți cu cifrele uriaşe le este foarte greu să-şi închipuie că unda luminoasă parcurge 300 000 km/s, ceea ce înseamnă 9 460 800 000 000 km într-un an, după cum le este greu să-şi imagineze că fiecare $cm^3$ de aer pe care-l respiră, conține 27 000 000 000 000 000 000 (douăzeci şi şapte de chintilioane) molecule.

Numerele uriaşe au apărut în ştiința matematică ca o consecință a progresului pe care l-a realizat omul în descoperirile sale ştiințifice. Necesitatea de a exprima şi a scrie aceste numere sub o formă cât mai simplă l-a dus pe om la adoptarea exponenților. Până în sec. al XVI-lea nu a existat nici un fel de simbol special pentru notarea puterii unui număr. Se scria pur şi simplu 25 x 25 x 25 pentru a arăta puterea a 3-a a numărului 25. După ce s-au cunoscut exponenții, aceştia au început să fie utilizați şi la scrierea şi exprimarea numerelor foarte mari. S-a introdus metoda de a reprezenta orice număr foarte mare printr-un multiplu de o putere a lui zece. De exemplu numărul douăzeci şi şapte de chintilioane se poate scrie: $27.000.000.000.000.000.000 = 27 \times 10^{18}$. Nevoia de a putea efectua cât mai uşor şi cât mai repede calcule cu numerele uriaşe, care au început să apară din ce în ce mai mult în diversele ramuri ale ştiinței şi în viața practică, a îndemnat pe matematicienii aceluiaşi secol să inventeze logaritmii.

### *110. Ce este un miliard?*

Un miliard de lei în cele mai mari bancnota posibile (100 lei), legate în volume groase de câte 1 000 de pagini, adică de 500 foi fiecare, ne oferă priveliştea unei frumoase biblioteci de 20 000 de volume, groase de 5 cm fiecare (fără copertă). Lungimea totală a rafturilor acestei biblioteci ar trebui să fie de 1 000 m. Ecuatorul pământesc are doar 40 000 000 m, deci cu o lungime de un miliard de metri se poate înconjura de 25 ori Ecuatorul. Ca să numărăm un miliard, treclnd prin toate numerele consecutive începând cu 1, ne trebuie 31 ani şi 252 de zile, adică aproximativ 32 de ani, ținând seama şi de anii bisecți şi lucrând continuu 24 de ore pe zi.

La acest rezultat se ajunge pe o cale foarte simplă, dacă convenim că pentru exprimarea fiecărui număr ne trebuie în medie o secundă. Deci într-o zi de 24 ore, care are: 24 x 60 x 60 secunde = 86 400 secunde, un om poate număra cel mult până la numărul 86 400. Un an obişnuit are 365 zile; un an bisect, care se intercalează la

fiecare 4 ani, are 366 zile; deci se poate socoti în medie anul ca având 365, 25 zile şi în consecinţă anul mediu are: 365,25 x 86 400 secunde = 31 557 600 secunde. Aceasta înseamnă că dacă un om numără zi şi noapte, fără nici un fel de odihnă, poate ajunge la numărul 31 557 600 în timp de un an. Pentru un miliard va fi deci nevoie de $\frac{1000\,000\,000}{31557\,600} = 31{,}688$ ani. (688 miimi dintr-un an reprezintă 252 zile).

Dacă un om ar lucra numai 8 ore pe zi la numărătoarea unui miliard, i-ar trebui 96 ani. Mai este ceva: la evaluarea timpului necesar pentru numărarea unui miliard am considerat o normă de numai un număr pe secundă. Această normă este justă atât timp cât este vorba de numere relativ mici: unu, doi, optsprezece, treizeci şi unu, o sută şaptezeci şi trei etc. Dar când trecem la numere mai mari cum ar fi, de pildă, cinci milioane nouă sute şaptezeci şi trei de mii patru sute optzeci şi cinci sau trei sute nouăzeci şi patru de milioane şase sute optzeci şi şapte de mii trei sute patruzeci şi nouă, atunci nu mai putem spune că exprimarea unui număr se face într-o secundă.

Dar şi cu norma adoptată de noi în calculul de mai sus, chiar dacă ea s-ar putea realiza cu cea mai mare bunăvoinţă a cititorilor noştri, nu prea credem să găsim printre ei amatori care să se încumete să numere, de exemplu, un miliard de boabe, bob cu bob...,

### *111. Distanţa de la Pământ la cea mai apropiată stea*

Cea mai apropiată stea de Pământ este steaua Alfa din constelaţia Centaurului, numită şi Proxima. Ea se află la o distanţă de 40 208 400 000 000 km de noi. Aceasta înseamnă că este de 6 795 de ori mai departe de Pământ decât cea mai depărtată planetă, Pluton, care este numai la 5 917 000 000 km de Pământ. O undă de lumină pornită astăzi de la Proxima va sosi la noi abia după 4 ani şi 3 luni...

Un avion, zburând cu o viteză de 1 000 km/h, ar ajunge la această stea în 4.590.000 de ani.

### *112. Alte distanţe astronomice*

Privind bolta cerească se văd unele stele mai strălucitoare şi altele mai puţin strălucitoare. Sunt chiar unele de abia vizibile cu ochiul liber. Altele, şi acestea sunt cele mai numeroase, nici nu se văd decât cu lunete foarte puternice. Uneori, de existenţa lor nu se poate lua cunoştinţă decât pe cale fotografică. Există o stea care este de 500.000 de ori mai strălucitoare decât Soarele şi totuşi nu este vizibilă cu ochiul liber din cauza distanţei enorme la care se află. Cu drept cuvânt s-ar putea spune despre această stea: „La Soare te poţi uita, dar la dânsa, ba!" căci este de atîtea ori mai strălucitoare decât Soarele şi totuşi ... nu se poate vedea!

Steaua Proxima, despre care am vorbit mai sus, este o stea strălucitoare. Ea ne apare astfel pentru că este cea mai apropiată de Pământ. Cu ochiul liber se văd stele mai strălucitoare şi care totuşi sunt mai depărtate. Aşa este steaua Deneb din constelaţia Lebedei, care este la 5.138.000.000.000.000 (5.138 trilioane) km de Pământ. O undă de lumină sosită acum pe Pământ a pornit de la această stea cu 543 de ani în urmă. Ea este de 126 de ori mai depărtată de Pământ decât Proxima.

Dar aceste distanțe par microscopice dacă ne ducem cu gândul puțin mai departe. După cum Pământul şi celelalte planete fac parte din sistemul solar, tot astfel Soarele, cu întregul lui sistem, face parte dintr-un sistem stelar gigantic numit *Galaxie.* Din această Galaxie, din acest sistem stelar, fac parte toate stelele care alcătuiesc constelațiile din Calea Lactee şi în care intră şi Soarele. Ea cuprinde vreo 40 de miliarde de stele. Dacă am înconjura Galaxia noastră cu o pânză imaginară, aceasta ar avea forma unui balon elipsoidal, adică a unei sfere turtite, cu diametrul mic de 20.000 ani lumină şi diametrul mare de 100.000 ani lumină. Dar mai sunt şi alte galaxii în Univers. Ele apar sub formă de nebuloase spirale. Galaxia cea mai apropiată de a noastră se afla la 1.000.000 ani lumină. Cum, după calculele savanților, omul există numai de vreo 500.000 ani, urmează că undele de lumină sosite astăzi pe Pământ au pornit de pe această galaxie cu mult înainte de apariția omului.

Şi câte stele care se mai văd astăzi strălucind pe bolta cerească nu mai strălucesc în realitate! Ele s-au stins de mult, iar noi nu vedem decât undele de lumină pornite acum zece mii, o sută de mii, un milion sau poate şi mai mulți ani, cum bine spune marele nostru poet Mihail Eminescu:

„ La steaua care-a răsărit
E-o cale atât de lungă
Că mii de ani i-a trebuit
Luminii să ne-ajungă.
Poate de mult s-a stins în drum
În depărtări albastre,
Iar raza ei abia acum
Luci vederii noastre.
........................................................"

### ***113. În câte părți se poate împărți practic o bucată foarte mică de materie?***

Este foarte interesant de ştiut că o serie de numere *uriaşe* întrebuințate în fizică, chimie şi biologie servesc să ilustreze tocmai *micimea* unor părți de materie. Astfel sunt numerele care arată cantitatea moleculelor sau a atomilor pe care-i conține o părticică dintr-un corp oarecare. Se ştie că o bucățică de carmin cât gămălia unui ac, adică mai mică decât 1 $mm^3$, ajunge ca să coloreze destul de bine 1 hl de apă. Considerând o bucățică de carmin chiar de 1 $mm^3$ şi ştiind că: 1 hl = 100 $dm^3$ = 100.000.000 $mm^3$, rezultă că acest fragment de colorant reprezintă a suta milioană parte din cantitatea de apă pe care a reuşit s-o coloreze. În ipoteza că bucățica de carmin considerată s-a împrăştiat în mod omogen în masa hectolitrului de apă, în fiecare volum din această apă colorată se va găsi o cantitate de carmin egală cu a suta milioana parte dintr-un milimetru cub.

Bineînțeles că s-ar putea introduce acest milimetru cub de soluție de carmin într-un alt volum de apă, de exemplu într-un litru. Cu siguranță că milimetrul cub de soluție s-ar dizolva în acest litru de apă, dar ochiul omului n-ar mai putea aprecia colorarea în roşu a lichidului. Se poate însă afirma că fiecare milimetru cub din litrul

de apă conține o cantitate extraordinar de mică din soluția de carmin introdusă. Cât de mică va fi această cantitate?

Dacă 1 litru are 1.000.000 $mm^3$ şi dacă s-a introdus, odată cu soluția de carmin, a suta milioană parte dintr-un milimetru cub de carmin, urmează că 1 $mm^3$ din litrul de apă conține a milioana parte din a suta milioana parte dintr-un milimetru cub, adică a suta miliarda parte dintr-un milimetru cub de carmin. Această cifră se scrie în unul din următoarele trei moduri:

$$\frac{1}{100000000000} mm^3 = \frac{1}{10^{11}} mm^3 = 10^{-11} mm^3$$

Se înțelege că se poate merge mai departe cu acest procedeu, luând 1 $mm^3$ din ultima soluție obținută atunci când s-a introdus soluția de carmin într-un litru de apă şi să se dizolve într-un nou volum de 1 litru de apă; atunci cantitatea de carmin s-ar divide şi mai mult. S-ar putea astfel ajunge prin această diviziune la cele mai mici părticele de materie, care să păstreze totuşi toate însuşirile corpului din care provin, adică la molecule.

### *114. Câte globule roşii conține sângele unui om?*

Globulele roşii din sângele omului au forma unor discuri cu un diametru de 0,007 mm şi o grosime de 0,002 mm. Grosimea nu este uniformă căci spre centrul discului ea se reduce (discul se subțiază). S-a constatat că în corpul omenesc se află aproximativ atâta sânge, în litri, de câte ori se cuprinde numărul 14 în numărul de kg al acelui corp.

Luând greutatea medie a unui om adult egală cu 75 kg, cantitatea de sânge cuprinsă în corpul lui va fi de: $\frac{75}{14} = 5{,}537$ litri sau aproximativ 5,5 litri, adică 5.500.000 $mm^3$.

De asemenea s-a mai constatat că 1 $mm^3$ de sânge conține circa 5.000.000 globule roşii. Deci în corpul unui om adult se găsesc: 5.500.000 x 5.000.000 = 27.500.000.000.000, adică 27,5 trilioane globule roşii.

Aşezate una lângă alta, aceste globule ar constitui o bandă roşie de 27.500.000.000.000 x 0,07 = 192.500.000.000 mm sau 192.500.000.000 mm = 192.500 km.

Deoarece lungimea Ecuatorului Pământului este de circa 40.000 km, cu această bandă roşie s-ar putea înconjura planeta noastră în dreptul Ecuatorului de $\frac{192500}{40000} = 4{,}812$ ori, adică aproximativ de cinci ori.

Transformate în pătrate de suprafață echivalentă şi aşezate unul lângă altul, aceste discuri ar ocupa o întindere de aproximativ 1.100 $m^2$. Aceasta înseamnă că pe ambele fețe, toate globulele roşii din corpul omului au o suprafață de 2.200 $m^2$. Datorită formei sale speciale, fiecare globulă are o suprafață mare în raport cu volumul respectiv. Numărul lor imens, înmulțit cu suprafața fiecărei globule dă o suprafață de 1.000 de ori mai mare decât suprafața corpului omenesc ceea ce le face să aibă o enormă capacitate de absorbție, transport şi eliminare de oxigen.

***115. Produsul primelor 100.000 numere întregi***

Acest produs dă un număr format din 456.572 cifre. Scriind acest număr cu caractere comune, am obține un rând lung de 1.250 m.

***116. Şirul 2 4 16 256...***

În acest şir de numere fiecare termen este pătratul termenului precedent. Al 25-lea termen al şirului are 5.050.446 cifre. Ca să putem exprima acest număr trebuie să vorbim zi şi noapte timp de o lună de zile, fără a respira măcar.

***117. Cel mai mare număr care se poate exprima cu trei cifre***

De când oamenii au învățat să utilizeze notarea puterilor cu exponenți, cel mai mare număr care se poate exprima cu trei cifre nu mai este 999 ci $9^{9^9}$.

***118. Masa celor 10 prieteni***

Zece prieteni, după ce au luat masa în comun, foarte încântați de felul în care s-au simțit, au hotărât, ca din această zi începând, să ia zilnic masa împreună. Pentru a cimenta legăturile dintre ei, au mai stabilit ca să-şi schimbe zilnic locurile, astfel ca de fiecare dată să se aşeze în altă ordine, până ce vor epuiza complet toate modurile posibile de aşezare. Unul din ei, care era deprins cu calculele matematice, vine a doua zi la masă, foarte vesel, spunându-le:

- Prieteni, pentru a ne ține de angajamentul luat, va trebui să trăim de acum încolo aproape 10.000 de ani!

- Cum adică? - întrebară toți în cor.

- Iată cum... - şi omul le explică foarte simplu că pentru a epuiza toate modurile de aşezare vor trebui să-şi schimbe locurile de 3.628.800 ori, ceea ce se poate împlini numai după tot atâtea zile, adică după aproape 10000 de ani.

***119. Scheletele unor cuburi***

În câte moduri se pot aşeza 12 bare de aceeaşi lungime dar divers colorate pentru a forma scheletul unui cub? Numai în 12! = 479.001.600 moduri.

***120. Cei 25 elevi dintr-o clasă***

Cei 25 elevi ai unei clase s-au hotărât să-şi schimbe regulat locurile astfel ca, în fiecare oră de curs, cel puțin unul din elevi să ocupe un alt loc, până vor epuiza toate modurile de aşezare a lor în bănci. Profesorul de matematică, observând acest lucru, i-a întrebat când au de gând să termine jocul. Neprimind nici un răspuns profesorul le-a explicat teoria permutărilor. Atunci elevii şi-au dat seama că pentru realizarea hotărârii lor ar trebui să-şi schimbe succesiv locurile de 1 x 2 x 3 x 4 x ... x 25 ori, adică de 15.511.210.043.330.985.984.000.000 ori. Admițând că, speriați de mărimea acestui număr de 26 cifre, elevii şi-ar schimba hotărârea şi ar conveni, pentru a termina mai repede jocul, să-şi schimbe locurile din secundă în secundă, ei ar trebui să renunțe şi în acest caz, deoarece după un mic calcul s-ar convinge că,

chiar continuând cu schimbarea locurilor atât ziua cât şi noaptea, tot nu ar putea termina înainte de 5.120.000 miliarde secole.

### *121. Amestecarea cărților de joc*

Ştiți în câte moduri se pot amesteca cele 52 de cărți ale unui joc? Toate aceste moduri sunt în număr de 52. Un astfel de număr nu l-am putea scrie într-un rând al unei cărți obişnuite. Este numărul 80 urmat de alte 66 de cifre.

### *122. Umila cerere a inventatorului jocului de şah*

Şahul este un joc foarte vechi. Inventatorul acestui joc se pare că ar fi un învățat indian cu numele de Sissa, Seta sa Nassir. Împăratul indian Seram, după ce învăță jocul, care după unii ar fi fost inventat pentru a distra şi instrui chiar pe acel monarh, a rămas atât de entuziasmat, încât s-a declarat gata să recompenseze pe inventator cu orice răsplată va cere. învățatul indian îşi formulă cererea, pretinzând pentru primul pătrat al tablei de şah un bob de grâu, pentru al doilea pătrat 2 boabe, pentru al treilea 4 boabe, pentru al patrulea 8 boabe şi aşa mai departe, dublând pentru fiecare pătrat boabele, până la al 64-lea.

Împăratul, supărat că învățatul i-a dispreţuit dărnicia cerând atât de puţin, porunci să i se dea lui Nassir un sac întreg cu grîu. Nassir a refuzat însă sacul cu grâu, susținând să i se dea numai atât cât a cerut el.

Mare fu mirarea împăratului, când unul din miniştrii săi îl anunță a doua zi că pentru a satisface cererea învățatului, nu vor ajunge toatemagaziile pline cu cereale ale împărăției şi nici cele ale restului lumii cunoscută pe atunci.

Nu prea avem motive să credem că pe vremea împăratului Seram matematicienii indieni cunoşteau formula de calcul a sumei termenilor progresiei geometrice. Ştim însă că matematicienii împăratului au calculat, cu mijloacele pe care le cunoşteau ei, că învățatul va avea de primit:

$2^{64}$ - 1 = 18.446.744.073.709.551.615 boabe de grâu.

Pentru a obține un asemenea număr de boabe ar fi trebuit culese opt recolte anuale de pe un ogor mare cât întreaga întindere a globului pământesc, presupunând că toată suprafața sa, inclusiv munții, oceanele, regiunile înghețate şi pustiurile devin terenuri arabile.

Considerând că un $m^3$ de grâu conține circa 15 milioane de boabe, această cantitate imensă de grâu se poate evalua la aproximativ 1.200.000.000.000 $m^3$. Dacă ar fi să înmagazineze asemenea cantitate de boabe într-un hambar lat de 8 m, în care grâul să se ridice până la o înălțime de 3 m, lungimea lui ar trebui să fie de 50.000.000.000 m, adică să înconjoare Pământul la Ecuator de 1.250 ori. Socotiți acum, cât ar fi trebuit să țină numărătoarea acestor boabe, dacă un om, ocupându-se zi şi noapte de această muncă poate număra cel mult 20 $m^3$ de boabe de grâu în 10 ani!

### *123. Câteva numere mari ... obişnuite*

Lungimea Ecuatorului Pământului ........................................................... 40 000 000 m
Suprafața uscată a globului pământesc inclusiv insulele ......................149 000 000 $km^3$

Suprafața oceanelor ........................................................................361 000 000 km$^2$
Volumul apei din oceane, calculat cu o adâncime medie de 4 km ......1 600 000 000 km$^3$
Suprafața globului pământesc ....................................................510 000 000 km$^3$
Diametrul Soarelui ..................................................................................1 390 600 km
Distanța de la Pământ la Soare ...............................................149 500 000 km
Distanța Pământ-Soare luată ca unitate astronomică ...........................150 000 000 km
Distanța de la Pământ la Uranus ...........................................2 500 000 000 km
Distanța de la Pământ la Pluton (cea mai depărtată planetă) ............5 917 000 000 km
Un an calendaristic are ..........................................................................8 760 ore
.....................................................................................................525 600 min
....................................................................................................31 536 000 sec
Lumina înaintează cu o viteză de ...................................................300 000 km/s

Anul astronomic, adică acela în care Pământul se,învârteşte complet în jurul Soarelui, are 365,25 zile, adică 8 766 ore sau 525 960 minut sau 31 577 600 secunde. De aceea după fiecare 3 ani calendaristici de 365 zile se introduce un al patrulea de 366 zile.
Un an lumină are ........................................................................9 460 800 000 000 km
Un metru cub de grâu are circa ..............................................15 000 000 boabe
Boabele dintr-un metru cub de grâu se numără zi şi noapte,
fără repaus, în timp de ............................................................................180 zile
Omul există de aproximativ ....................................................................500 000 ani
Viața pe pământ există de peste ...............................................300 000 000 ani
Pământul are vârsta de peste .................................................2 000 000 000 ani
Soarele există de aproximativ ......................................10 000 000 000 000 ani

# *Capitolul 8* Diverse probleme recreative

***124. Puțină aritmetică***

- „În ce clasă sunteți voi, măi băieți?"

- „Toți suntem într-a şasea afară de 12; toți suntem într-a şaptea afară de 12; toți suntem într-a opta, afară de 12 şi toți suntem într-a noua afară de 12."

Câți elevi sunt în total?

***125. Prețul unei cărămizi***

O cărămidă costă 1 leu şi o jumătate de cărămidă. Cât costă o cărămidă?

***126. Găinile şi iepurii de casă***

Într-o curte se plimbă laolaltă găini şi iepuri de casă, în total 100 de capete şi 120 de perechi de picioruşe. Ştiți câte găini şi câți iepuri sunt acolo?

***127. Cât costă un metru de stofă***

- „Cât costă metrul de stofă?"
- „O treime şi jumătate din 100 de lei!"
- „Dar cum să împart o sută exact prin trei?"
- „Nici nu ți-am cerut aşa ceva!"
- „Atunci, cât costă metrul de stofă?"
- „Ghici!"

***128. În cât timp se taie un buştean***

Două echipe au de tăiat nişte buşteni de aceeaşi mărime, cu ajutorul unor ferăstraie mecanice, în câte 20 de bucăți egale. O echipă taie un buştean în 100 secunde. A doua are nevoie de 5 secunde pentru fiecare tăietură. Care din cele două echipe câştigă întrecerea?

***129. O problemă cu ouă de găină***

O găină şi jumătate fac un ou şi jumătate. Câte găini vor oua 16 ouă în 8 zile?

***130. Bătăile orologiului***

Ca să bată ora 5 un orologiu are nevoie de 5 secunde. De câte secunde va avea nevoie pentru a bate ora 9?

***131. O socoteală greşită cu mere***

O țărancă vine la târg cu 60 de mere. Ea vinde, 30 de mere pentru care încasează 10 lei. Văzând că merele au căutare, țăranca vinde restul cu prețul de 0,50 lei mărul şi încasează deci, pentru ultimele 30 de mere, 15 lei. Venind a doua zi la târg tot cu 60 de mere, femeia îşi face socoteala că va ajunge la acelaşi rezultat ca în ajun, dacă va vinde de la început merele dând 5 bucăți la 2 lei. La sfârşitul vânzării

se trezeşte că a încasat numai 24 lei în loc de 25 lei, cât încasase cu o zi înainte şi cum s-ar fi aşteptat să primească.

Cum de a încasat a doua zi mai puțin cu 1 leu ?

### *132. Numărătoarea oilor*

Un cioban fiind întrebat câte oi are în turma sa răspunde că nu cunoaşte numărul lor exact, dar dacă le numără câte 2, câte 3, câte 4, câte 5 sau câte 6 îi rămâne întotdeauna o oaie de prisos. Însă dacă numără câte 7, nu-i rămâne nici una. Câte oi are ciobanul în turma sa?

### *133. Câți nepoți are bunicul?*

De ziua bunicului au venit toți nepoții să-l felicite. Pentru a-şi trata musafirii, bunicul a cules din grădina lui un număr de mere şi de trei ori mai multe nuci. După ce fiecare nepot a fost servit cu câte 3 mere şi câte 8 nuci, bunicului i-au mai rămas 20 de mere şi 75 de nuci.

Câți nepoți are bunicul?

### *134. O problemă cu 3 mere*

Andrei, Barbu şi Costică primesc trei mere de mărimi diferite. Mărul lui Andrei este pe jumătate față de mărul lui Costică, iar mărul lui Barbu pe trei sferturi față de mărul lui Costică.

Cum poate obține fiecare copil o parte egală, tăind numai unul din mere?

### *135. Cinci pâini*

Doi oameni care au călătorit împreună şi din care unul avea două pâini asupra sa, iar altul 3 pâini, au întâlnit pe un al treilea călător flămând. După ce toți trei s-au ospătat împreună în mod egal, al treilea călător, odată cu mulțumirile sale, dădu primilor doi cinci lei şi şi-a văzut apoi de drum.

Cum au trebuit să-şi împartă primii doi călători această sumă?

### *136. Iepurele şi câinele de vânătoare*

Un iepure aleargă urmărit de un câine de vânătoare. În timp ce iepurele, mai iute de picior, face 8 salturi, câinele execută numai 5. În schimb câinele, mai lung de picioare, face 3 sărituri cât 7 ale iepurelui. Dacă iepurele este cu 88 de salturi mai înaintat decât câinele, câte sărituri mai are el de făcut până să fie ajuns de câine?

R: Să reducem totul la aceeaşi unitate de măsură: o săritură de iepure. Atunci vom avea: 3 sărituri de câine = 7 sărituri de iepure 1 săritură de câine = 7/3 sărituri de iepure 5 sărituri de cîine = 7 x 5/3 = 35/3 sărituri de iepure. Deci la fiecare 8 salturi de iepure, câinele, care face numai 5 salturi, va parcurge o distanță egală cu 35/3 sărituri de iepure. El se va apropia în acest timp de iepure cu 35/3 – 8 = 11/3 sărituri de iepure. Să împărțim acum toată distanța care trebuie parcursă de câine pentru a ajunge iepurele în lungimi egale cu 8 sărituri de iepure. După parcurgerea fiecărei din aceste lungimi câinele va avea un avans de 11/3 sărituri de iepure. Pentru a câştiga avansul total de 88 sărituri de iepure, câinele de vânătoare va trebui să

parcurgă atâtea lungimi dintr-acestea, de câte ori se cuprinde 11/3 în 88, adică 24 lungimi. Deci până la urmă, după ce iepurele va face 24 x 8 = 192 sărituri, el va fi ajuns de câine.

### *137. O socoteală cu nişte mingi*

În 6 mingi albe se află 6 mingi albastre. Fiecare minge albastră conține câte 6 mingi roşii, iar în fiecare minge roşie se află câte 6 mingi verzi.

Câte mingi sunt în total?

### *138. Drumul melcului*

Un melc vrând să iasă din fundul unui puț adânc de 10 metri, urcă în fiecare zi câte 2 metri, iar în fiecare noapte coboară câte 1 metru.

Cât timp îi va trebui melcului pentru a-şi atinge scopul?

### *139. În cât timp se umple cada?*

Dacă las deschis robinetul de la cazan, cada din baie se umple în 5 minute. Dacă deschid ventilul de scurgere din fundul căzii, ea se goleşte în 7 minute. Mai ştiu că apa vine din robinet în mod uniform şi din cadă curge tot uniform. Nu ştiu însă în cât timp s-ar umple cada, dacă aş lăsa deschise şi robinetul şi ventilul.

Dumneavoastră ştiți?

R: Dacă se lasă deschis robinetul şi ventilul timp de 7 minute, se va scurge prin ventil o cantitate de apă egală cu volumul căzii. Însă în cadă va mai rămâne atâta apă cât a venit pe robinet timp de 7 - 5 = 2 minute. Cum pe robinet vine în 5 minute cantitatea de apă necesară pentru a umple cada, rezultă că în 2 minute va veni 2 cincimi din această cantitate. Deci după cele 7 minute, cât va sta deschis atât robinetul cât şi ventilul, va rămâne în cadă un disponibil de apă egal cu 2 cincimi din volumul ei. De acum încolo rezolvarea este uşoară şi se poate obține rezultatul aplicând regula de 3 simplă.

### *140. Moştenirea beduinului*

Un beduin, murind, a lăsat ca moştenire celor trei fii ai săi 17 cămile, dispunând ca întâiul născut să ia o jumătate din numărul lor, al doilea să ia o treime, iar ultimul fiu, să primească a noua parte. în timp ce fii se certau pentru împărțirea moştenirii, a trecut un cădi (judecător arab) călare pe o cămilă. Fiind luat drept arbitru de către tinerii beduini, cadiul a descălecat, şi-a lăsat cămila să pască alături de celelalte 17 cămile, a făcut împărțirea astfel încât fiecare din moştenitori s-a declarat mai mult decât mulțumit, apoi a încălecat pe cămila sa şi a plecat.

Cum a făcut cadiul împărțirea?

### *141. O altă moştenire a unui alt beduin*

Înainte de a muri un beduin a lăsat cu limbă de moarte celor patru fii ai săi să-şi împartă cămilele sale precum urmează: primul fiu să ia jumătate din numărul cămilelor, plus una, al doilea, jumătate din restul cămilelor plus una, al treilea fiu să

ia jumătate din ceea ce a mai rămas plus o cămilă, iar ultimul fiu să primească o singură cămilă.

Puteți să spuneți câte cămile a lăsat ca moştenire bătrînul beduin şi câte a luat fiecare fiu?

***142. Darul grădinarului***

Un număr de frați primesc în dar de lă un grădinar, un număr de mere, cu condiția ca împărțirea lor să se facă în modul următor: primul frate să ia un măr, plus o cincime din ce a rămas, al doilea să primească două mere, plus o cincime din cele rămase, al treilea trei mere, plus o cincime din rest şi aşa mai departe. După împărțire se constată că fiecare frate a primit acelaşi număr de mere. Ştiți câte mere şi câți frați au fost?

***143. Câți bani am în fiecare buzunar?***

Dacă adun banii pe care îi am în buzunarul drept şi în cel stâng al hainei mele, constat că posed 67 lei. Dacă aş dubla suma din buzunarul stâng cu bani luați din buzunarul drept, încă mi-ar mai rămâne în acesta cu 3 lei mai mult decât în buzunarul stâng.

Câți bani am în fiecare buzunar?

***144. Cu gâştele la păscut***

- „Cu câte gâşte ai fost la păscut?"

- „Dacă una mergea înaintea altor două, alta între două şi una după alte două gâşte, atunci cu câte gâşte am fost la păscut?"

***145. Clientul tutungiului***

Într-o tutungerie intră un client să cumpere 5 țigări pentru 6 lei şi oferă tutungiului o hârtie de 10 lei, cerând apoi restul. Neavând măruntiş, tutungiul schimbă hârtia la un vecin şi-i dă clientului restul. După câteva ore, vecinul, observând că hârtia primită de la tutungiu este falsă, i-o înapoiază şi primeşte în schimb o hârtie bună.

Cum din toată această combinație cineva a trebuit să piardă şi altcineva să câştige, se întreabă cine a pierdut şi cât, precum şi cine a câştigat şi cât?

***146. Avionul Bucureşti-Constanța***

Din Bucureşti spre Constanța pleacă în acelaşi moment un avion cu o viteză medie de 200 km/oră şi un tren cu o viteză medie de 100 km/oră, cu dispoziția precisă de a ajunge în acelaşi moment la Constanța. Drumul se face absolut în linie dreaptă, iar distanța între punctul de plecare şi punctul de sosire este de 20 km pentru ambele vehicule.

Cum avionul soseşte înaintea trenului la Constanța, pilotul întoarce brusc spre Bucureşti şi întâlneşte trenul într-un punct oarecare al drumului său. în momentul înt Unirii, avionul se întoarce din nou spre Constanța. Cum din nou se întâmplă acelaşi

lucru, mişcarea avionului de „du-te-vino” se repetă de mai multe ori, până când atât avionul cât şi trenul ajung în acelaşi moment la Constanța.

Câți km face avionul în total din momentul plecării sale de la Bucureşti până în momentul aterizării, considerând că timpul necesar fiecărei virări pentru întoarcere este egal cu zero.

***147. Frunza de nufăr***

Pe luciul apei unui lac a apărut o frunzuliță de nufăr abia vizibilă cu ochiul liber. Hrănită abundent de tulpina care o poartă, ea se dezvoltă dublându-şi zilnic suprafața, astfel că după 30 de zile acoperă lacul pe toată întinderea lui. După câte zile frunza de nufăr a acoperit numai jumătate din suprafața lacului?

***148. Cei 20 de dansatori***

La o serbare vin 20 de tineri, băieți şi fete. Unul din băieți a dansat cu 5 fete. Un al doilea a dansat cu 6 fete, un al treilea cu 7 şi aşa mai departe. Ultimul din ei a dansat cu toate fetele. Ştiți câți băieți şi câte fete au luat parte la această serbare?

***149. Prețul peştelui***

- „Cu ce preț vinzi peştele, pescarule?”

- „Cu cât vând corpul, cu atât vând şi capul cu coada la un loc.”

- „Dar cât costă capul şi coada?”

- „Capul costă 2 lei, iar coada, cât capul şi încă o jumătate de corp. Ei, acum ştii cu cât vând un peşte?”

***150. Piese de bronz şi piese de oțel***

Un strungar a executat în 180 de minute 16 piese identice de bronz şi 12 piese la fel cu primele, dar de oțel, fără să ştie însă cât timp a lucrat la o piesă de bronz şi cât la una de oțel. Lucrând la fel de rapid, el a executat altă dată 15 piese de bronz şi 15 de oțel, de aceeaşi formă şi mărime cu primele, în 195 de minute. „Acum, s-a gândit strungarul, pot să calculez exact în cât timp execut o piesă de bronz şi în cât timp una de oțel.” Repetați calculul strungarului.

***151. Banii din buzunar***

- „Câți bani ai în buzunar?”

- „Dacă-i împart la 10 îmi rămân 9 bani. Dacă-i împart la 9 îmi rămân 8 bani, dacă-i împart la 8 îmi rămân 7 bani şi aşa mai departe. La urmă dacă-i împart la 2 îmi rămâne 1 ban. Acum ştii câți bani am în buzunar?”

***152. Salariul muncitorului***

Un muncitor câştigă într-un an 5000 lei, plus un rând complet de îmbrăcăminte (costum şi palton). După 9 luni de muncă el îşi face socoteala şi constată că, în afară de suma necesară pentru îmbrăcăminte, a mai primit 3500 lei. Care este valoarea costumului şi a paltonului la un loc?

***153. Masa celor trei prieteni***

Trei prieteni iau împreună masa la un restaurant. La plată fiecare din ei scoate câte o hârtie de 10 lei şi primesc în total un rest de 5 lei. Din aceşti 5 lei fiecare prieten îşi retrage cîte 1 leu, adică un total de 3 lei, iar cu restul de 2 lei ei îşi cumpără o revistă. La urmă, unul din prieteni reface socoteala şi constată că fiecare din ei a scos din buzunar câte 10 lei şi a primit înapoi câte 1 leu, deci pentru masă a cheltuit fiecare câte'9 lei, adică în total: 3 x 9 = 27 lei la care se mai adaugă preţul revistei de 2 lei. în total: 29 lei, iar toţi au scos din buzunar 30 lei.

Şi atunci prietenii şi-au pus întrebarea: „Unde se află diferenţa de 1 leu?"

***154. Merele turcului***

Un turc fură din grădina sultanului un coş cu mere. La ieşire îl întâmpină un prim paznic, care-l lasă să treacă după ce turcul îi dă o jumătate din numărul merelor, plus două. Unui al doilea paznic trebuie să-i dea iar jumătate din numărul merelor rămase, plus două. în fine al treilea şi ultimul paznic cere şi obţine şi el jumătate din numărul merelor rămase în coş, plus două. La urmă, turcul nostru se trezeşte cu un singur măr.

Câte mere a trebuit să fure acest turc, ca să poată mânca şi el măcar un măr?

***155. Un vierme amator de literatură***

Într-un colţ de raft al unei vechi biblioteci se află o lucrare în 6 volume broşate, de care nu s-a atins nimeni de multă vreme. Fiecare volum cuprinde 312 file, afară de cele 2 file care servesc drept coperte. Un vierme, curios de a şti ce cuprind aceste volume că nu sunt citite, le-a pătruns, începând chiar de la prima filă a volumului I. Înaintând astfel prin cărţi, el a ajuns la ultima filă a volumului VI şi după ce o străbate şi pe aceasta este surprins de bibliotecar.

Câte file a găurit viermele pentru satisfacerea curiozităţii sale?

***156. Ciorapii din pod***

Trebuie să-mi iau din pod o pereche de ciorapi din aceia pe care soţia mea i-a pus azi la uscat. Din cauza întunericului din pod, şi pentru că nu vreau să risc aprinderea unui chibrit nu am siguranţa că voi nimeri o pereche de aceeaşi culoare. Ştiu însă că în pod se află la uscat 6 perechi de ciorapi negri şi 6 perechi gri.

Câţi ciorapi a trebuit să iau pentru a mă asigura că cel puţin o pereche va fi de aceeaşi culoare?

***157. O problemă cu mănuşi***

Tocmai când să-mi scot şi mănuşile din sertar, mi s-a stins lumina din cauza unui defect la uzină. Cum n-am avut nici un chibrit în casă, deschid sertarul şi mă gândesc: Câte mănuşi să iau ca să fiu sigur că voi putea îmbrăca o pereche de aceeaşi culoare, deoarece în sertar am 2 perechi de mănuşi albe şi 2 perechi de mănuşi negre? În momentul în care mi-am scos numărul necesar de mănuşi conform raţionamentului meu, s-a aprins lumina şi am constatat că n-am greşit.

Cum am judecat?

### *158. Întâlnirea prietenilor*

Şapte prieteni fac parte din acelaşi club sportiv, pe care-l frecventează în orele lor libere. Dar orele lor libere nu coincid, astfel încât ei se întâlnesc foarte rar. Unul din ei vine zilnic la club, al doilea odată la 2 zile, al treilea vine odată la 3 zile şi aşa mai departe. Toți însă vin la aceeaşi oră a zilei respective şi în una din ele s-a potrivit că s-au întâlnit cu toții la club.

După câte zile, de la prima lor întâlnire comună, se mai întâlnesc ei toți deodată la club?

### *159. De câte ori este mai greu un uriaş față de un pitic?*

Cel mai înalt om cunoscut până în prezent a avut o înălțime de 2,75 m. Piticul cel mai mic pe care-l cunoaşte omenirea a avut o înălțime de 0,40 m.

Ştiți câți pitici înalți de 40 cm egalează în greutate pe un om înalt de 2,75 m?

### *160. O problemă cu jumătăți de ouă*

O țărancă s-a dus la oraş să vândă un număr de ouă şi s-a întors acasă cu un ou nevândut, întrebată de fiul ei cu câte ouă a plecat la oraş, ea i-a răspuns:

- „Am avut doi clienți. Unul a luat o jumătate din numărul total de ouă, plus o jumătate de ou. Al doilea a cumpărat o jumătate din ce a rămas şi încă o jumătate de ou."

- „Şi cum ai făcut, mamă, să împărți oul crud exact în două ?"

- „Iată că s-a putut, dat fiind numărul total de ouă, pe care le-am avut de vânzare. Poți să-mi spui cu câte ouă m-am, dus la oraş?"

### *161. Un butoi plin şi trei goale*

Un podgorean dăruieşte celor trei fii ai săi un vas cu 240 litri de vin, cu condiția ca să-şi împartă toată cantitatea de vin în părți egale. Ei nu au la dispoziție altă măsură de capacitate decât 3 vase goale de 130, 110 şi 50 litri.

Cum au reuşit să facă împărțirea în părți egale?

### *162. Suta de gâşte*

O gâscă, întâlnind un cârd de gâşte la păscut, spuse primei gâşte din cârd:

- „Bună dimineața, sută de gîşte!"

- „Greşeşti, soro, îi răspunse cealaltă. Nu suntem o sută! Dacă am fi de două ori câte suntem, cu o jumătate din câte suntem, cu un sfert din câte suntem şi cu tine împreună am fi de abia o sută."

Câte gâşte au fost în cârd?

### *163. Cele două coşuri cu păsări*

O țărancă şi-a trimis cele două fiice ale ei cu două coşuri de păsări la oraş. Păsările erau toate de greutate egală. Cum una din fete se văita din cauza greutății prea mari a coşului ei, cealaltă a calmat-o zicându-i:

„De ce te plângi? Dacă eu aş lua una din păsările tale, aş avea dublul greutăţii pe care o porţi tu, pe când dacă eu ţi-aş da o pasăre dintr-ale mele, am avea de purtat greutăţi egale."

Câte păsări ducea fiecare din fete?

***164. O problemă de viteză***

De acasă până la şcoală am de mers 2,880 km pe care-i parcurg pe bicicletă, cu o viteză de 12 km/oră. Spre casă vin cu bicicleta la vale şi de aceea parcurg drumul cu o viteză de 18 km/oră.

Cu ce viteză medie fac eu drumul de acasă până la şcoală şi înapoi?

***165. Vârsta mea şi vârsta ta***

- „Ce vârstă ai tu, frate?"
- „Când tu vei avea vârsta mea vom avea împreună 54 de ani."
- „Dar tocmai asta vreau să ştiu, care este vârsta ta actuală?"
- „Eu am de două ori vârsta pe care o aveai tu când eu aveam vârsta ta actuală. Ei, acum ştii câţi ani am?"

***166. Cele trei vase cu vin***

Iată trei vase având fiecare câte o altă cantitate de vin. Dacă din vasul care are cantitatea cea mai mare turnăm în celelalte două atâta vin încât să se dubleze conţinutul lor, obţinem din nou trei cantităţi diferite, dar un alt vas va avea acum mai mult vin. Dacă dublăm iar conţinutul vaselor care au mai puţin vin, luând din cel cu vin mai mult, al treilea vas le va întrece de data aceasta pe toate. Dacă mai dublăm conţinutul celor două vase care au rămas cu mai puţin vin, luând din al treilea vas, obţinem câte 72 de litri în fiecare din ele.

Puteţi să spuneţi cât vin a fost în fiecare vas?

***167. Ouă de raţă şi ouă de găină***

Iarna, 3 ouă de raţă şi 2 ouă de găină costă la un loc 6,50 lei. Vara, ouăle de raţă se ieftinesc, cu 10%, iar cele de găină cu 15%, şi atunci 3 ouă de raţă cu 2 ouă de găină costă la un loc numai 5,75 lei.

Cât costă un ou de raţă şi cât costă unul de găină iarna si vara?

***168. Greutăţile de la 1 la 40 kg***

Un comerciant are o bară de oţel perfect omogen, de formă prismatică şi grea de 40 kg. El vrea să taie această bară într-un număr minim de bucăţi, de greutăţi diferite, astfel ca să poată cântări cu ele orice greutate reprezentată de un număr întreg de la 1 până la 40 kg.

Ştiţi cum va proceda?

***169. Mucurile de ţigară***

Din cauza unui viscol, doi alpinişti se văd siliţi să rămână într-o cabană câteva zile. Unul din ei avea cu el 8 ţigări, iar celălalt 9.

- „Ei acum ce facem aici în timpul acesta ca să nu ne plictisim? întrebă cel cu 9 ţigări."

- „Vom fuma şi vom rezolva probleme de aritmetică recreativă", răspunse celălalt scoţând din rucsacul lui o carte, hârtie şi creion.

- „Cât vei putea fuma, dacă nu ai decât 8 ţigări?"

- „Ai uitat că îmi rămân şi mucuri. La nevoie le voi folosi şi voi, face câte o ţigară din 3 mucuri."

- „Şi câte ţigări vei mai putea fuma din cele 8 mucuri care îţi vor rămâne."

- „Exact atâtea câte vei putea fuma tu din cele 9 mucuri ale tale şi nu-mi va mai rămâne nici un muc după ce voi termina."

- „Nu văd cum ai să faci tu din 8 mucuri, tot atâtea ţigări câte voi face eu din 9."

- „Ai să vezi! Răbdare şi ... tutun!"

# ***Capitolul 9*** *Jocuri aritmetice*

## ***170. Despre poetul Lermontov şi un joc aritmetic***

Despre celebrul poet M.I.Lermontov se ştie că a fost un mare amator şi bun cunoscător de matematică. Mai mult încă, într-un timp s-a ocupat exclusiv şi cu mare pasiune de această ştiinţă. Odată, fiind în vizită la Moscova la un prieten al lui şi fiind foarte preocupat cu rezolvarea unei probleme de matematică, s-a închis în birou şi a lucrat până noaptea târziu la găsirea soluţiei. Obosit, Lermontov a adormit fără să reuşească să rezolve problema. în somn a visat că un matematician celebru i-a indicat soluţia căutată.

Lermontov a reţinut atât de bine figura acestui matematician încât a doua zi a putut să-l deseneze cu creionul. Portretul semăna foarte bine cu chipul lui John Neper, inventatorul logaritmilor. Lermontov văzuse un portret al lui Neper într-o carte a acestui matematician pe care o citise cu câteva zile înainte. Portretul desenat de Lermontov este păstrat în prezent în Palatul Puşkin al Academiei de Ştiinţe din Moscova.

Acesta nu este unicul caz de rezolvare a unor probleme de matematică în timpul somnului. Sunt cunoscute şi alte cazuri asemănătoare, deoarece este ştiut că mintea savanţilor continuă să lucreze de multe ori şi în timpul somnului la problemele care-i preocupă. în legătură cu preocupările lui Lermontov de amator de matematică, figurează în biografia lui povestirea următoare:

„La începutul anului 1841, regimentul Tenghinşki era cantonat la Anapa. Ofiţerii, printre care se găsea şi Lermontov, plictisiţi, se adunau la câte unul din ei. Odată a venit vorba despre un oarecare cardinal savant, care putea să rezolve mintal cele mai complicate probleme de matematică.

- Ce zici de asta, Lermontov? îl întrebă unul din cei mai respectaţi, comandanţi de batalion, un bătrân decorat cu ordinul „Sf. Gheorghe”. Se spune că dumneata eşti un bun matematician.

- Nu-i nimic surprinzător în asta - i-a răspuns poetul - şi eu pot să vă dovedesc, dacă doriţi, o remarcabilă experienţă de calcul matematic.

- Mă rog!

- Gândiţi-vă la un număr şi eu, cu ajutorul câtorva operaţii aritmetice simple, am să-l ghicesc.

- Ei bine, să încercăm, a zâmbit bătrânul cu îndoială. Şi cât de mare trebuie să fie acest număr?

- Oricât de mare. însă prima dată, pentru a face mai repede calculele, mărginiţi-vă la un număr format din două cifre.

- Bine, m-am gîndit - spuse comandantul de batalion, făcând cu ochiul ofiţerilor din jur şi, pentru a putea fi verificat pe urmă, în cazul când calculul n-ar fi bine făcut, comunică acest număr unei doamne care stătea alături de el.

- Binevoiţi să-i adăugaţi - începu Lermontov - încă 25 şi socotiţi în gând sau pe hârtie. Bătrânul ceru un creion şi începu să socotească.

- Acum, dacă vreţi, adăugaţi încă 125. Bătrânul adăugă.

- Şi scădeţi 37. Bătrînul scăzu.

- Mai scădeţi şi numărul la care v-aţi gândit la început. Bătrânul scăzu.

- Acum înmulţiţi restul cu 5. Bătrânul înmulţi.

- Împărţiţi numărul obţinut cu 2. Bătrânul împărţi.

- Acum să vedem ce ar fi trebuit să obţineţi. E, dacă nu mă înşel, numărul 282 1/2?

Comandantul de batalion sări în sus, atât îl surprinsese exactitatea calcului.

- Da, exact atât: 282 1/2. M-am gândit la numărul 50. Şi el verifică din nou calculul. Într-adevăr, 282 1/2. Tii, dar nu, eşti cumva vrăjitor?

- Vrăjitor sau nu, dar am învăţat matematică, zâmbi Lermontov.

- Dar dă-mi voie... - bătrânul, evident, se îndoia: nu văzuse cumva Lermontov cifrele în timp ce el făcea calculele? S-ar putea să repetăm?

Bătrânul scrise numărul la care se gândise, fără să-l mai arate nimănui, puse hârtia sub sfeşnic şi începu să calculeze înaninte numerele date de poet. Rezultatul fu ghicit şi de astă dată. Lucrul acesta îi pasiona pe toţi. Bătrânul dădea mirat din umeri. Gazda îl ruga pe Lermontov să repete experienţa şi aceasta reuşi şi de astă dată.

Vestea se răspândi repede în fortăreaţă. Oriunde apărea poetul, i se adresa rugămintea de a ghici numere. El satisfăcu de câteva ori aceste rugăminţi însă, în cele din urmă, se plictisi şi peste câteva zile, tot la o serată, dezvălui secretul, care constă în faptul că numărul gândit, oricare ar fi, se scade din suma formată din el şi alte câteva numere pe care le adaugă cel care dictează, astfel că acestuia îi este uşor să afle rezultatul."

Într-adevăr, dacă numim cu *N* numărul gândit de comandant şi urmărind calculele dictate de Lermontov, avem: $\frac{(N+25+125-37-N)^5}{2} = 282{,}5.$

Asemenea jocuri, cu astfel de combinaţii de numere se pot crea oricât de multe. Se cere numai atenţie la urmărirea calculelor. Jocurile matematice îşi au importanţa lor în matematica recreativă prin faptul că, executate în reuniuni, pun pe cei prezenţi în situaţia să reflecteze la găsirea soluţiilor celor mai potrivite pentru satisfacerea legilor fiecărui joc aparte şi în consecinţă la un exerciţiu al minţii care nu poate fi decât de folos celor care iau parte la aceste jocuri.

Prin frumuseţea lor şi prin varietatea subiectelor, jocurile matematice constituie o distracţie căutată de mulţi oameni, care după ce au luat o dată parte la ele, simt apoi o deosebită atracţie pentru asemenea divertisrmente intelectuale.

Pentru buna lor reuşită, jocurile matematice cer de la acei care le execută o anumită siguranţă şi o mare precizie. Siguranţa şi precizia cerută nu se pot avea decât cunoscând baza matematică a fiecărui joc.

De aceea noi am dat la fiecare joc din acest capitol şi baza lui teoretică. în acest fel se uşurează şi foarte mult reţinerea modulului de executare a jocului în memoria acelora care vor să-l înveţe.

***171. Cum putem ghici două numere mai mici ca 10***

Cereți unei persoane să-şi aleagă două numere $A$ şi $B$ mai mici ca 10, fără să le comunice celor prezenți. Mai cereți apoi acestei persoane efectuarea următoarelor operații simple:

a) să înmulțească pe $A$ cu 2;

b) să adune la acest produs numărul 5;

c) să înmulțească rezultatul obținut cu 5;

d) să adune pe $B$ la acest rezultat şi să vă comunice ultimul rezultat, pe care să-l numim $C$.

Dacă scădeți, în gând, din $C$ numărul 25, obțineți un număr format din $A$ zeci şi $B$ unități şi deci veți putea spune foarte liniştit ce numere s-au ales.

Exemplu: persoana căreia urmează să i se ghicească numerele gândite, şi-a ales 8 şi 6. Urmând indicațiile de mai sus, se va avea: 8 x 2 = 16, 16 + 5 = 21, 21 x 5 = 105, 105 + 6 = 111 (numărul care se comunică), $C$ = 111, $C$ - 25 = 111 - 25 = 86. Numerele alese vor fi deci 8 şi 6.

Dacă se urmăresc operațiile efectuate, se poate găsi imediat şi explicația jocului. Aceste operații se concretizează în următoarele relații: $(A \times 2 + 5)5 + B = 10A + 25 + B = C$. Scăzând din $C$ pe 25 se obține: $10A + B = A$ zeci + $B$ unități.

***172. Ghicirea unui număr format din trei cifre***

Se cere unei persoane dintr-o reuniune să scrie un număr format din trei cifre şi să efectueze următoarele operații:

a) să alăture la dreapta numărului ales un număr identic cu acesta;

b) să treacă hârtia la o altă persoană, care să împartă acest număr prin 11;

c) hârtia să fie trecută la o a treia persoană, care să împartă câtul obținut prin 7;

d) operația executată, aceeaşi hârtie să fie transmisă apoi la a patra persoană, care să împartă acest nou cât prin 13.

Hârtia fiind apoi înapoiată primei persoane, ea va constata cu mirare, că după toate operațiile efectuate, s-a obținut ca rezultat primul număr, cu toate că persoana, care a dictat operațiile n-a cunoscut numărul ales.

Explicația e foarte simplă dacă ținem seama că, prin alăturarea unui număr identic la numărul ales, se obține un număr de şase cifre, care reprezintă pe primul înmulțit cu 1001...

Exemplu: Se alege numărul 368. Alăturându-i încă un 368 se obține 368.368. Se observă că: 368.368 = 368.000 + 368 = 1.001 x 368, pe de altă parte: 1.001 = 7 x 11 x 13. Deci prin operațiile efectuate nu s-a făcut decât o înmulțire a numărului ales cu 1.001 şi împărțirea lui tot prin 1.001, ceea ce trebuia să ducă neapărat la obținerea numărului inițial de trei cifre.

***173. Un joc în care nimeni nu pierde şi nimeni nu câştigă***

Spuneți la trei persoane, din cele prezente la o reuniune, să scrie fiecare câte un număr de trei cifre în mod cu totul independent şi fără să vă comunice acele numere. Cereți apoi ca fiecare să alăture la dreapta numărului scris încă unul identic

cu cel ales. în felul acesta vor rezulta numere de câte şase cifre, la fel ca în problema precedentă.

De exemplu, dacă numărul ales de una din persoane este 347, alăturând la acesta un număr identic cu el, va rezulta 347.347. Anunţaţi acum că, deşi nu cunoaşteţi numerele scrise, sunteţi dispus să plătiţi la fiecare partener al jocului atâţia bani cîte unităţi va avea fiecare rest care va rezulta după ce prima persoană îşi va împărţi numărul său prin 7, a doua prin 13 şi a treia prin 91.

Cum cele mai mari resturi care se pot obţine atunci, când împărţim nişte numere prin 7, 13 şi 91 sunt numerele 6, 12 şi 90, rezultă că sunteţi gata să plătiţi în total cel mult 6 + 12 + 90 = 108 bani. Să presupunem că cei trei parteneri cu care jucaţi sunt Andrei, Barbu şi Costică şi că ei şi-au ales ca numere:

| Andrei | Barbu | Costică |
|---|---|---|
| 479 | 298 | 574 |

După alăturarea numerelor identice, vom avea:

| Andrei | Barbu | Costică |
|---|---|---|
| 479 479 | 298 298 | 574 574 |

Spre mirarea lor şi a celorlalte persoane prezente la joc după ce Andrei îşi va împărţi numărul său prin 7, Barbu pe al său prin 13, iar Costică numărul format de el prin 91, nu va rămâne nici un rest. Ei nu vor avea de primit nimic.

Spuneţi atunci, că sunteţi dispus totuşi să-i compensaţi cu ceva şi le permiteţi să-şi aleagă alte trei numere, tot de câte trei cifre şi să repetaţi jocul. De data aceasta, anunţaţi că numărul lui Andrei se împarte prin 11, al lui Barbu prin 77, iar al lui Costică prin 143.

Spre stupefacţia lor, iar nu va rămâne nici un rest şi iar nu vor avea de primit nimic. Propuneţi-le atunci, spre a nu le răpi speranţa unui câştig că sunteţi dispuşi la o nouă „rundă". După ce Andrei, Barbu Costică îşi vor pregăti numerele lor, le veţi oferi, respectiv, divizorii 1.001, 91 şi 11. Şi de data aceasta rezultatul va fi nul.

Jocul se mai poate repeta alegând din cei şapte divizori arătaţi până acum (7, 11, 13, 77, 91 şi 143) o altă combinaţie de trei. Rezultatul va fi acelaşi.

Cum se explică acest lucru?

În realitate, fiecare din cei trei parteneri la joc, atunci când a alăturat la dreapta numărului de trei cifre, un număr identic cu acesta, nu a făcut decât să înmulţească numărul ales cu 1 001, aşa cum am mai arătat.

Într-adevăr, din exemplele de mai sus se vede: 479 x 1.001 = 479.479, 298 x 1.001 = 298.298, 574 x 1.001 = 574.574. Pe de altă parte, numărul 1.001 fiind divizibil prin 7,11 şi 13, adică: 1.001 = 7 x 11 x 13, el se împarte exact şi prin produsele divizorilor săi, adică prin: 7 x 11 =77, 7 x 13 = 91, 11 x 13 = 143.

Prin urmare, oricare din numerele alese de prietenii noştri Andrei, Barbu şi Costică, după ce li s-a alăturat la dreapta lor câte un număr respectiv identic, au devenit divizibili prin 1.001, şi deci, şi prin 7,11, 13, 77, 91 şi 143. Acesta este secretul jocului, iar reţinerea celor trei divizori ai lui 1.001 nu constituie nici o dificultate.

### *174. Jocul cu numerele consecutive*

Cereți cuiva să-şi aleagă în gând două numere consecutive. Pentru a se putea face uşor calculul mintal în cursul jocului propuneți ca numerele să fie relativ mici. Cereți apoi persoanei respective să efectueze, în gând, sau în scris, următoarele calcule:

a) să ridice la pătrat numărul mai mare, iar la acest pătrat să adune numărul mic;

b) să ridice la pătrat numărul mai mic, iar la acest nou pătrat să adune numărul mare;

c) să facă diferența între ambele rezultate şi să vă comunice numai această diferență.

Dacă luați jumătatea acestei diferența obțineți pe cel mai mic din celei două numere consecutive, în felul acesta aveți imediat posibilitatea să arătați că ştiți să ghiciți cele două numere alese.

Exemplu: cele două numere alese în gând sunt 8 şi 9. Se fac mintal calculele: $9^2 + 8 = 89$, $8^2 + 9 = 73$, $89 - 73 = 16$ (rezultat care vi se comunică), $16 : 2 = 8$ (numărul cel mic din cele două alese).

Cu puține cunoştințe de aritmetică putem explica şi cun putem fi ... ghicitorii acestor numere. Dacă însemnăm cele două numere consecutive cu *n* şi *n - 1,* atunci urmărind regulile jocului, avem:

$$\mathbf{(n + 1)^2 + n - [n^2 + (n + 1)] = n^2 + 2n + 1 + n - n^2 - n - 1 = 2n.}$$

Deci rezultatul calculului cerut este totdeauna dublul numărului mai mic din cele două numere consecutive. De aici şi posibilitatea noastră de a ghici numerele alese.

### *175. Un joc de adunare*

Se joacă în doi. Se convine ca una din persoane să numească un număr oarecare din şirul 1 ... 100. A doua persoană trebuie să adune la acesta un număr din şirul 1 ... 10. La suma obținută prima persoană urmează să adune iar un număr, care să nu fie mai mare ca 10. După aceasta vine din nou rândul persoanei următoare care adună, la noua sumă rezultată, iar un număr care să nu treacă de 10 şi aşa mai departe. Fiecare pronunță de-a dreptul rezultatul adunării.

Jocul se continuă astfel şi câştigă persoana care a ajuns prima la numărul 100. Cum poate fi cineva sigur că va învinge în acest joc?

Răspunsul nu este greu de dat, dacă raționăm puțin asupra modului cum se produc adunările succesive, ținând seama de condiția esențială: fiecare număr pronunțat de cei doi parteneri ai jocului să fie obținut prin adunarea la precedentul a unui număr care să nu fie mai mare ca 10. Dar înainte de toate să-i numim pe cei doi jucători cu Anton şi Bucur şi să presupunem că Bucur învinge.

Deci Bucur pronunță: 100! Pentru ca Bucur să poată ajunge 100 trebuie neapărat ca tot el să fi pronunțat înainte numărul 89. Numai în felul acesta l-a putut el sili pe Anton ca, adunând la 89 un număr până la 10 inclusiv, să pronunțe unul din numerele posibile de la 90 până la 99, după care tot Bucur să spună: 100!

Raționând în acelaşi mod, ajungem la concluzia că tot Bucur pentru a ajunge la 89, trebuie să fi pronunțat numărul 78. Repetând raționamentul, găsim regulat că numerele pe care trebuie să le urmărească acel care vrea să câştige sunt obținute prin scăderea succesivă a lui 11 din 100, 89, 78 etc. adică:

100 - 11 = 89,    56 – 11 = 45,
89 - 11 = 78,    45 – 11 = 34,
78 – 11 = 67,    34 - 11 = 23,
67 – 11 = 56,    23 - 11 = 12,
12 - 11 = 1.

În concluzie, candidatul la titlul de învingător, trebuie să urmărească regulat să pronunțe numerele din şirul (progresia aritmetică): 1,12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

***176. Ştiți cum se poate ghici un număr întreg oarecare?***

Indiferent numărul la care s-a gândit cineva, i se cere să facă următoarele operații:

a) să înmulțească acel număr cu 20;

b) să adauge 33 la produs;

c) să înmulțească suma obținută cu 5 şi să comunice rezultatul.

Din acest rezultat persoana care propune jocul scade în gând 165 şi dă la o parte ultimele două zerouri, pe care le va conține întotdeauna restul astfel obținut.

Ce rămâne după această operație reprezintă numărul gândit.

De exemplu, persoana căreia urmează să i se ghicească numărul, s-a gândit la 3 893. Conform indicațiilor de mai sus se va avea: 3.893 x 20 = 77.860, 77.860 + 33 - 77.893, 77.893 x 5 = 389.465 (număr care se comunică), 389.465 - 165 = 389.300. Dând la o parte ultimele 2 zerouri se va avea numărul gândit, 3.893.

Urmărind operațiile executate se găseşte şi explicația jocului. Însemnând cu $N$ numărul întreg gândit se va avea $(20N + 33)5 = 100N + 165$. Scăzând pe 165, rămâne $100N$, adică numărul întreg gândit înmulțit cu 100 sau acel număr urmat de două zerouri. Dând la o parte aceste două zerouri rămâne numărul gândit.

***177. Un alt procedeu de ghicire a unui număr întreg oarecare***

Se cere unei persoane să se gândească la un număr întreg oarecare, apoi i se dictează următoarele operații:

a) să multiplice numărul gândit cu 24;

b) rezultatul să-l împartă prin 3;

c) câtul obținut să-l înmulțească cu 23;

d) noul rezultat să-l împartă prin 4;

e) noul cât, să-l împartă prin numărul gândit;

f) să adauge numărul gândit la acest ultim cât şi să comunice rezultatul.

Scăzând în gând numărul 46 din acest rezultat, se poate comunica persoanei numărul gândit.

Exemplu: persoana căreia urmează să i se ghicească numărul gândit şi-a ales 2.374. Se va avea deci: 2.374 x 24 = 56.976, 56.976 : 3 = 18.992, 18.992 x 23 =

436.816, 436.816 : 4 = 109.204, 109.204 : 2.374 = 46, 46 + 2.374 = 2.420 (număr care se comunică), 2.420 - 46 = 2.374 (numărul gândit).

Urmărind şirul operaţiilor se poate găsi şi explicaţia jocului, care este foarte simplă. Într-adevăr, punând: *N* = numărul gândit, 23 = c, 24 = *a,* 4 = *d,* 3 = *b,* 46 = *e.* Operaţiile indicate în regulile jocului se vor putea scrie: $\frac{N\frac{ac}{bd}}{N} + N = \frac{ac}{bd} + N$. Cum numărul 46, ales de acel care conduce jocul, reprezintă chiar valoarea fracţiei $\frac{ac}{bd}$, este evident că dacă scădem pe 46 din $\frac{ac}{bd} + N$ trebuie să ne rămână N. Se vede foarte uşor că numerele 24, 3, 23, 4 şi 46 pot fi înlocuite cu orice altă combinaţie de 5 numere, cu condiţia ca între ele să existe relaţia:

$$\frac{ac}{bd} = n = \text{un număr întreg.}$$

***178. Cum ghicim suma a patru numere de câte trei cifre***

Afirmăm de la început că suma a patru numere de câte trei cifre, dintre care două să fie scrise de o altă persoană şi două de noi, va fi un număr pe care noi îl scriem pe o bucată de hârtie, şi pe care o încredinţăm, fără a divulga numărul, unei a treia persoane. Pe această hârtie noi scriem de fapt numărul 1.998. Iată cum procedăm pentru obţinerea rezultatului dorit:

Persoana cu care jucăm scrie un număr oarecare format din trei cifre, spre exemplu 275. După aceasta noi scriem sub 275 numărul 724, adică, un număr care reprezintă diferenţa dintre 999 şi 275. Cerem apoi ca persoana cu care jucăm să scrie al treilea număr de trei cifre, de exemplu 408, sub numărul 724. În continuare, noi scriem acum diferenţa între 999 şi 408, adică numărul 591, sub numărul 408. Adunând:

$$\begin{array}{r} 275\,+ \\ 724\phantom{\,+} \\ 408\phantom{\,+} \\ \underline{591}\phantom{\,+} \\ 1.998\phantom{\,+} \end{array}$$

Spre uimirea celor prezenţi, se constată că numărul scris de noi la început separat pe hârtie este tot 1.998. Din însăşi felul cum s-a expus mai sus jocul se poate deduce explicaţia procedeului, deoarece 2 x 999 = 1.998.

***179. O problemă de memorie***

Scrieţi pe o bucată de hârtie următoarele trei numere: 3.612.244.896, 1.734.681.360, 9.648.241.263 şi cereţi persoanei sau persoanelor de faţă, să le privească un minut şi apoi să le transcrie din memorie. Mai mult decât de memorie, problema e de perspicacitate.

De fapt, privite cu atenţie, se observă că cele trei numere de câte zece cifre de mai sus prezintă următoarele particularităţi, care uşurează mult memorizarea lor: primul număr se obţine prin dublarea succesivă a cifrelor începând cu prima (3, 6, 12,

24, etc), al doilea număr se obține prin dublarea succesivă a unor numere începând cu acela format din primele două cifre (17, 34, etc), s-a adăugat un zero pentru a se completa numărul de 10 cifre; al treilea număr se obține prin împărțirea succesivă prin 2 a numărului format din primele două cifre (96, 48, 24, etc).

În consecință, nu se memorează decât prima cifră a primului număr, şi primele două cifre a celorlalte două numere, iar restul... depinde de atenție.

***180. Scamatoria cu inelul***

Iată într-adevăr o scamatorie... aritmetică. Cu ajutorul unor numere, cu care se fac simple calcule aritmetice, să poți ghici cine dintr-o grupă de persoane poartă un anumit inel, pe care deget şi chiar pe care falangă a degetului!

Grupa de oameni din care face parte acel căruia, îi ghiciți, poate cuprinde cel mult 9 persoane. Pentru că scamatoria se realizează cu ajutorul unor calcule aritmetice, fiecare persoană va fi denumită cu un număr de la 1 până la 9. Fiecare deget va fi şi el marcat cu un număr, astfel: degetul cel mic de la mâna dreaptă va fi nr.1, inelarul va purta nr.2 şi aşa mai departe. Trecând la mâna stângă, degetul gros va fi însemnat cu nr.6 şi în continuare următorul cu nr.7, iar degetul mic al acestei mâini cu nr.10. în ce priveşte falangele, aceea de la vârful unui deget va purta nr.1, următoarea nr.2, iar ultima nr.3.

Aşadar, inelul se află pe degetul unei persoane din grupa în care facem scamatoria, fără ca noi să ştim pe ce deget, la ce persoană şi pe care falangă. Se numeşte pe cineva din grupă care să-şi noteze numerele corespunzătoare. Acestei persoane îi dictăm calculele pe care trebuie să le efectueze şi anume:

- să înmulțească numărul degetului cu 2,
- să adauge 1 la produsul obținut,
- rezultatul să-l înmulțească cu 5,
- să adauge numărul persoanei la acest nou produs,
- să dubleze suma obținută,
- să adune apoi o unitate,
- rezultatul obținut să-l înmulțească iar cu 5,
- la produsul obținut să adauge numărul falangei.

Cerem să ni se comunice numai ultimul rezultat în gând, scădem din el numărul 55. Rezultatul obținut de noi este un număr care poate fi format din trei sau patru cifre. Prima cifră de la stânga acestui număr arată *degetul,* a doua indică persoana, iar a treia cifră reprezintă *falanga* în cazul când sunt patru cifre, a treia şi a patra cifră ne dau numărul 10, acesta fiind singurul număr de două cifre care intră în joc, el reprezentând degetul mic al mâinii stângi.

Să luăm acum un exemplu. Să presupunem că inelul se află pe inelarul mâinii stângi al persoanei nr.6 şi pe falanga a treia. Calculele vor fi următoarele:

$(9 \times 2 + 1)5 + 6 = 101$, $(101 \times 2 + 1)5 + 3 = 1018$ (număr care ni se comunică).

Scădem în gând: $1018 - 55 = 963$.

Deci inelul se află pe al nouălea deget (inelarul mâinii stângi), al persoanei nr.6 şi pe falanga a treia. Care este secretul acestei scamatorii? Foarte simplu. Să urmărim calculul de mai sus, dar ceva mai descompus. Vom avea succesiv:

9 x  2 + 1
9 x  10 + 6 + 5
9 x  20 + 6 x 2 + 11
9 x 100 + 6 x 10 + 55
9 x 100 + 6 x 10 + 3 + 55 sau 900 + 60 + 3 + 55

Dând la o parte pe 55, obținem 963. Se observă deci că prin operațiile pe care le-am făcut asupra numerelor, care reprezintă degetul, persoana şi falanga cu ajutorul unor numere fixe: 2, 1 şi 5, am obținut un anumit rezultat. Scăzând din acesta pe 55, rezultă un alt număr care păstrează ca cifre semnificative pentru sute, zeci şi unități, respectiv numărul degetului, numărul persoanei şi numărul falangei.

***181. Cele trei obiecte***

Să ghiceşti în buzunarul cui se găseşte unul din cele trei obiecte, care se aflau pe masă, este într-adevăr o scamatorie dacă... totul nu s-ar baza pe matematică.

Cereți de la persoanele prezente trei obiecte mici, o agrafă, un briceag şi un creion, pe care le aşezați pe masă o dată cu o farfurie, în care să puneți 24 chibrituri. Cereți apoi să se numească trei persoane care să-şi ascundă fiecare câte unul din aceste obiecte, atunci când nu veți fi prezent în cameră. Fie acele trei persoane pe nume Alexandru, Ion şi Mihai. Din cele 24 chibrituri dați lui Alexandru un chibrit, lui Ion două şi lui Mihai trei chibrituri.

Mai cereți ca în lipsa dvs., persoanele care şi-au ascuns obiectele să-şi distribuie chibriturile din farfurie în felul următor: persoana care va lua agrafa să mai ia tot atâtea chibrituri câte are, acela care va lua briceagul să ia un număr dublu de chibrituri față de câte a primit la început, iar persoana care va lua creionul să ia de patru ori atâtea chibrituri câte are. Restul de chibrituri să rămână în farfurie.

Revenind în cameră şi numărând din ochi chibriturile rămase în farfurie, puteți ghici cine a luat fiecare din obiecte. Şi anume:

| *Alexandru a luat* | *Ion a luat* | *Mihai a luat* | *Dacă au rămas în farfurie* |
|---|---|---|---|
| agrafa | briceagul | creionul | 1 chibrit |
| briceagul | agrafa | creionul | 2 chibrituri |
| agrafa | creionul | briceagul | 3 chibrituri |
| briceagul | creionul | agrafa | 5 chibrituri |
| creionul | agrafa | briceagul | 6 chibrituri |
| creionul | briceagul | agrafa | 7 chibrituri |

Cum s-a ajuns la acest rezultat: însemnăm numele persoanelor şi obiectelor cu inițialele lor A, I, M şi a, b, c. Obiectele a, b şi c putând fi luate de oricare din persoanele A, I, M, pot ocupa atâtea poziții câte permutări se pot face din trei obiecte, adică 3 x 2 x 1 = 6 poziții şi anume:

| A | I | M |
|---|---|---|
| a | b | c |
| c | a | b |
| a | c | b |
| b | a | c |
| c | b | a |
| b | c | a |

Resturile de chibrituri corespunzătoare celor şase cazuri posibile se pot deduce din următorul tabel:

| AIM | TOTALUL CHIBRITURILOR LUATE DE | | | Chibrituri luate | Chibrituri rămase |
|---|---|---|---|---|---|
| | Alexandru | Ion | Mihai | | |
| abc | 1 + 1 = 2 | 2 + 4 = 6 | 3 + 12 = 15 | 23 | 1 |
| cab | 1 + 4 = 5 | 2 + 2 = 4 | 3 + 6 = 9 | 18 | 6 |
| acb | 1 + 1 = 2 | 2 + 8 = 10 | 3 + 6 = 9 | 21 | 3 |
| bac | 1 + 2 = 3 | 2 + 2 = 4 | 3 + 12 = 15 | 22 | 2 |
| cba | 1 + 4 = 5 | 2 + 4 = 6 | 3 + 3 = 6 | 17 | 7 |
| bca | 1 + 2 = 3 | 2 + 8 = 10 | 3 + 3 = 6 | 19 | 5 |

După cum se vede din această tabelă, este imposibil să rămână în farfurie 4 chibrituri, iar un alt număr decât 1, 2, 3, 5, 6 sau 7 chibrituri, corespunzător celor 6 cazuri posibile, nu poate exista. Pentru o bună reuşită a jocului se recomandă să vă notați în carnet toate cele şase poziții posibile ale obiectelor corespunzătoare respectivelor persoane, în ordinea crescătoare a resturilor de chibrituri şi să consultați carnetul înainte de revenire în cameră, iar prima distribuire a chibriturilor s-o faceți în ordinea alfabetică a inițialelor persoanelor.

### *182. Ora întâlnirii*

Anunțăm că putem ghici ora la care o persoană din grupul nostru se gândeşte să se întâlnească a doua zi cu cineva. Să presupunem că acea oră gândită ar fi A. Cerem persoanei căreia urmează să-i ghicim să execute următoarele operații: să ne comunice o altă oră B, şi începând de la B să numere în gând, în sensul invers mersului acelor ceasornicului, numerele: A, A + 1, A + 2,...,12 + B. La urmă i se atrage atenția că atunci când va ajunge la (B + 12) va da şi peste ora gândită.

Exemplu: persoana, căreia vrem să-i ghicim ora, s-a gândit la ora 10 şi comunică ora 7. Deci va trebui să numere înapoi pe cadran, începând de la ora 7, numerele 10, 11, 12,...,19 (numărul 19 fiind 7 + 12) şi va da peste ora 10.

Pentru reuşita jocului, este bine ca atunci când i se spune persoanei, căreia urmează să-i ghicim ora gândită, ca să numere până la 19, să nu i se arate că acest număr este format din 7 + 12. Iată şi explicația matematică a acestei scamatorii: se cere persoanei să numere în gând, pe cadran, de la ora B în sensul invers mersului acelor de ceasornic A, (A + 1), (A + 2),...,(12 + B). Deci ea numără: B + 12 - A sau cum ar fi în cazul exemplului de mai sus 7 + 12 - 10. Aceasta înseamnă că:

- Numără B unități în sensul invers mersului acelor de la ora B. Deci trebuie să ajungă la ora 1.

- Numără 12 ore în jurul cadranului pornind de la ora 1 tot în sensul invers mersului acelor şi deci trebuie să ajungă tot la ora 1.

- Numără apoi de la ora 1 în sensul mersului acelor până la ora A. Deci a ajuns la ora A.

### *183. Care este a treia cifră?*

Cereți unei persoane să-şi aleagă un număr din trei cifre, să facă suma cifrelor luate ca simple unități, să scadă numărul obținut din cel dat şi să vă comunice numai două din cifrele restului. Puteți uşor afla a treia cifră, dacă faceți diferența între suma cifrelor comunicate luate ca simple unități şi numărul imediat superior, multiplu de 9.

Exemplu: Se alege numărul 385. Suma cifrelor $3 + 8 + 5 = 16$

$$\begin{array}{r} 385 - \\ \underline{16} \\ 369 \end{array}$$

Dacă se comunică numai cifrele 9 şi 6, a treia cifră este neapărat 3, deoarece $9 + 6 = 15$, iar diferența de la 15 până la numărul imediat superior lui 15 şi multiplu de 9, adică 18, este 3. Procedeul ghicirii acestui număr se explică în felul următor: orice număr din 3 cifre se scrie sub forma $100a + 10b + c$, în care $a$ cifra sutelor, $b$ cifra zecilor, $c$ cifra unităților. Dacă facem suma $a + b + c$ şi o scădem din număr avem, $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9\,(11a + b)$.

Deci, dacă dintr-un număr format din trei cifre se scade sumă acestor cifre, luate ca simple unități, se obține un multiplu de 9. Fiind un multiplu de 9, suma cifrelor sale luate ca simple unități ne dă tot un multiplu de 9. Cum este vorba de un număr format din maximum trei cifre, numărul care se obține adunând aceste cifre nu poate fi decât 9, 18 sau 27.

### *184. Cum ghicim data naşterii unei persoane*

Să faci o scamatorie matematică, veți spune, ghicind un număr oarecare de anumită formă, bazat pe regulile rigide ale aritmeticii, mai merge. Dar să ghiceşti data naşterii unei persoane, este o chestie de extract de naştere, acte de stare civilă etc, care nu au nici o legătură cu matematica. Ori ai cotrobăit prin actele mele, ori eşti vrăjitor!

Totuşi, vom răspunde, se poate „ghici" ziua, luna şi data naşterii unei persoane şi bazat numai pe simple calcule aritmetice, dacă se procedează ca mai jos:

Persoana a cărei dată de naştere vrem s-o aflăm va face o serie de operații, pe rând, fără a ne comunica decât un singur număr, pe care-l vom cere la timp. Iată operațiile pe care le dictăm în ordinea lor:

a) dublează numărul ce reprezintă ziua naşterii;

b) adună 4 la numărul obținut;

c) înmulțeşte această sumă cu 50;

d) adună numărul de ordine al lunii de naştere;

e) înmulţeşte cu 100 ultima sumă;

f) scade din ultimul produs, numărul care reprezintă vârsta actuală.

Se înţelege prin vârsta actuală în sensul problemei, vârsta care se obţine scăzând anul curent din anul naşterii, indiferent dacă este vorba de ani împliniţi sau neîmpliniţi. Cerem apoi să ni se comunice ultimul rezultat din care scădem un număr *N,* care variază după secolul în care s-a născut persoana a cărei vârstă urmează s-o ghicim şi după anul, în care se rezolvă problema şi anume:

Dacă persoana, a cărei vârstă urmează s-o aflăm, s-a născut în secolul trecut, atunci:

*N* = 19.842 dacă problema se rezolvă în 1958,

*N* = 19.841 dacă problema se rezolvă în 1959, ş.a.m.d.

Dacă însă persoana, a cărei vârstă urmează s-o aflăm, s-a născut în secolul actual, atunci:

*N* = 19.942 dacă problema se rezolvă în 1958,

*N* = 19.941 dacă problema se rezolvă în 1959, ş.a.m.d.

Numărul care se obţine după scăderea lui *N* se desparte în grupe de câte două cifre de la dreapta la stânga. Prima grupă de la stânga, care poate fi şi de o cifră, reprezintă ziua naşterii, a doua, luna şi a treia reprezintă ultimele două cifre pe care trebuie să le adăugăm la 1800 sau 1900, după caz, pentru a obţine anul naşterii.

*Exemplul 1.* Data naşterii unei persoane este 13 august 1892 adică 13.08.1892. Dacă ghicirea se face în 1958, vom avea:

13 x 2 = 26

26 + 4 = 30

30 x 50 = 1500

1500 + 8 = 1508

1508 x 100 = 150800

150800 - 66 = 150734    număr ce ni se comunică

150734 - 19842 = 130892 sau 13.08.92, adică 13 august 1892

*Exemplul 2.* Data naşterii unei persoane este 7 noiembrie 1906, adică 7.11.1906. Dacă ghicirea se face în 1958, vom avea:

7 x 2 = 14

14 + 4 = 18

18 x 50 = 900

900 + 11 = 911

911 x 100 = 91100

91100 - 52 = 91048    număr care ni se comunică

91048 - 19942 = 71106 sau 7.11.06, adică 7 noiembrie 1906

Iată şi o verificare a procedeului urmat: însemnând ziua naşterii cu *a,* luna cu *b* şi ultimele două cifre ale anului naşterii cu *c,* fiecare din numerele obţinute din unul din calculele de mai sus se poate scrie sub forma: 10.000*a* + 100*b* + *c.* Şi acum, dacă pentru cazul persoanei născută în secolul actual scriem identitatea: 10.000a + 100b + c = 71.106 şi dacă descompunem numărul 71.106 într-o sumă formată din zeci de mii, sute şi unităţi, vom avea: 71.106 = 7 x 10.000 + 11 x 100 + 6 = 10.000 x 7 + 100 x 11 + 6 sau 10.000 *a* + 100 *b* + *c* = 10.000 x 7 + 100 x 11 + 6, de unde deducem:

*a = 7, b = 11, c = 6.* Repetând calculele făcute, pentru cazul unei persoane născute în secolul trecut, vom scrie: [(2a + 4)50 + b]100 – [1958 – (1800 + c)] – N = 10000a + 100b + c.

Desfăcând parantezele şi efectuând reducerile avem: 10000a + 100b + c + 19842 - *N* = 10000a + 1006 + c, de unde: *N* = 19842.

***185. În ce zi a săptămânii cade o anumită zi a lunii?***

Întrebaţi pe cineva, în ce zi cade 23 august 1958 şi cereţi răspunsul fără ca persoana respectivă să consulte calendarul. Evident că răspunsul va fi greu de dat, ţinând seama că trebuie adunat numărul tuturor zilelor până la 23 august 1958, de împărţit la 7 şi de văzut cât mai rămâne şi apoi de ţinut seama în ce zi suntem astăzi şi aşa mai departe. Operaţia se simplifică şi devine un interesant joc matematic în felul următor:

Se formează pentru anul respectiv un tablou, în felul celui de mai jos, în care s-au înscris în prima linie lunile, în a doua ziua din fiecare lună în care cade prima duminică, iar în linia a treia, diferenţele dintre numărul 7 şi numerele din linia a doua.

| I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 2 | 6 | 4 | 1 | 6 | 3 | 7 | 5 | 2 | 7 |
| 2 | 5 | 5 | 1 | 3 | 6 | 1 | 4 | 0 | 2 | 5 | 0 |

Din numerele din ultima linie se formează trei numere din câte 4 cifre: 2551, 3 614, 0 250. Aceste trei numere se calculează, o dată pentru totdeauna, la începutul anului şi trebuie memorate sau notate pe prima pagină a unui carnet sau a agendei.

Pentru a afla în ce zi a săptămânii cade o dată oarecare, adunăm la data respectivă cifra corespunzătoare lunii despre care este vorba din linia a treia a tabloului, împărţim această sumă prin 7, iar restul obţinut ne arată în a câta zi a săptămânii cade acea dată.

*Exemple:* Vrem să ştim în ce zi a săptămânii cade 1 mai 1958. Procedăm precum urmează:

Cifra corespunzătoare lunii mai este 3. Adunăm pe 3 la 1 şi obţinem numărul 4. împărţind pe 4 la 7, aflăm zero întregi şi rest 4. Ziua de 1 mai 1958 cade în a patra zi a săptămânii, deci joi.

În ce zi a săptămânii cade 23 august 1958?

Ţinând seama că cifra corespunzătoare lunii august este 4, vom face următoarele operaţii, mintal: 23 + 4 = 27, 27 : 7 = 3, rest 6. 23 august 1958 cade în ziua a şasea, deci sâmbătă.

Explicaţia operaţiei este simplă, dacă urmărim următorul tablou, în care am aşezat zilele lunii corespunzătoare zilelor din săptămână, de exemplu pentru luna august.

Astfel de mici tablouri se văd în mod obişnuit în multe calendare:

| L | M | M | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |

Numărul 4 corespunde celor patru spații goale, din tablou, de la începutul săptămânii. Adăugând pe 4 la 23, am completat primul rând cu numărul de zile, corespunzătoare unei săptămâni întregi. Acum, dacă scădem din 23 + 4 = 27 numărul de săptămâni întregi, ne rămân 6 zile. De aici deducem că 23 august cade în a şasea zi a săptămânii (sâmbătă).

# *Capitolul 10* Cum calculăm rapid

### *186. Un calcul versificat*

De data aceasta voi spune o poezie pe care am auzit-o într-un cerc de amatori de matematică. O voi declama clar, răspicat şi din ce în ce mai repede:

Pune un zece
La cincisprezece
Şi cincizeci
La douăzeci
Şi încă două lângă nouă
Şi apoi taie-le în două!
Iar în timp ce am să tac,
Spune repede, cât fac?

- Cincizeci şi trei, veți răspunde imediat... Bine, dar cum ați calculat în mintea vostră? Ați adunat şi împărțit pur şi simplu, repede, numerele în gând aşa cum ați învățat la şcoală sau ați întrebuințat o altă metodă decât cea obişnuită? Dacă mintea dumneavoastră v-a condus pe o altă cale decât aceea folosită în mod obişnuit, v-ați dat seama că ați aplicat o altă *tehnică de calcul,* un procedeu rapid?

De obicei, când calculăm, noi şi vorbim, adică traducem prin cuvintele noastre procesul de gândire care s-a format într-un anumit fel atunci când am învățat diferitele reguli de calcul. Dar dacă lăsăm gândirea liberă, observăm că ea lucrează mult mai repede ca vorbirea. Vorbirea este de multe ori o frână în ceea ce vrea să exprime mintea. Ea lucrează mai încet. Se spune doar: „repede ca gândul!" Aceasta însă nu înseamnă că mintea nu foloseşte ceea ce am învățat odată şi ni s-a fixat prin exercițiu continuu. Atunci când facem calcule rapide, mintea noastră se bazează pe cunoştințele acumulate de noi, dar numai că ea le combină astfel ca să ajungem pe un drum mai scurt la rezultatul urmărit.

### *187. Adunarea rapidă*

Recurgem la un calcul mintal al sumei şi în loc să începem cu adunarea unităților, apoi a zecilor etc, adică de la dreapta la stânga, pornim invers, de la stânga la dreapta. începem deci cu cifrele care indică ordinele mai mari ale numerelor de adunat. Un exemplu cu suma a două numere cu câte două cifre va lămuri imediat. Să efectuăm adunarea 34 + 52. În mintea noastră vom despărți mai întâi pe 34 în 3 şi 4, iar pe 52 în 5 şi 2 şi vom spune apoi: „trei cinci, plus patru doi, opt şase". Rezultatul adunării este deci 86. Ce se întâmplă însă dacă suma unităților este un număr mai mare ca nouă?

Foarte simplu! Mărim cifra zecilor cu o unitate. Să adunăm, de exemplu, 46 + 85. Vom spune în mintea noastră: „patru şase, plus opt cinci, treisprezece unu". Prin urmare rezultatul este 131.

Dacă avem de adunat o coloană de mai multe numere, trebuie să ne speriem. Totul decurge la fel de simplu, din aproape în aproape. începem adunarea de sus în jos şi coborâm treaptă cu treaptă. Să adunăm, de exemplu, următoarele numere:

34 Vom spune: „trei patru, cinci nouă, nouă trei, patru
59 şapte, paisprezece zero, doi şase, şaisprezece
47 şase, opt trei, douăzeci şi patru nouă”
26
83
249

Această tehnică poate să ne apară cam greu de aplicat la adunări lungi şi cu numere mari. Dar cu puţină îndrăzneală şi multă obişnuinţă ne putem deprinde să facem şi astfel de adunări destul de rapid. La asemenea adunări se pune însă mai curând problema exactităţii calculului decât aceea a rapidităţii. Pentru verificarea exactităţii unui calcul aritmetic, noi facem o „probă”. Cum facem în mod obişnuit proba adunării, ştim. Dacă am efectuat adunarea, unităţi cu unităţi, zeci cu zeci, etc. de jos în sus, repetăm la fel adunarea de sus în jos. Comparăm apoi ambele rezultate şi dacă nu se potrivesc spunem că adunarea este greşită.

Dar care adunare este greşită? Prima sau a doua? Nimeni şi nimic nu ne poate spune! Putem să greşim atât la prima operaţie cât şi la a doua, pe care am numit-o impropriu „probă”. La o probă trebuie executată o altfel de operaţie decât aceea care urmează să fie verificată. De exemplu, proba împărţirii se face înmulţind catul cu împărţitorul, se adună restul la rezultat, iar suma obţinută trebuie să ne dea deîmpărţitul, în cazul când împărţirea este bună. Cum vom face atunci proba unei adunări ca să fim siguri de exactitatea ei? Vom folosi „proba cu 9” sau „proba cu 11”. Cum ambele feluri de probe se bazează pe acelaşi principiu, vom arăta numai în ce constă „proba cu 9”. La adunarea de mai jos am efectuat proba cu nouă în modul următor:

| | |
|---|---|
| 132 | 6 |
| 2892 | 3 |
| 5427 | - |
| 8395 | 7 |
| 653 | 5 |
| 2097 | - |
| 6896 | 2 |
| 26492 | 23 |
| **5** | **5** |

În dreptul fiecărui termen al adunării am format suma cifrelor sale luate ca simple unităţi. De exemplu, la primul termen, 132, avem 1 + 3 + 2 = 6. Pe 6 l-am înscris în coloana din dreapta, în cazul când din această sumare a rezultat un număr mai mare ca 9, adică unul format din 2 cifre, le-am adunat din nou pe acestea până am obţinut ca rezultat o singură cifră. De exemplu la ultimul termen, 6.896 am procedat în modul următor: 6 + 8 + 9 + 6 = 29; 2 + 9 = 11; 1 + 1 = 2.

Dacă prin adunarea succesivă a cifrelor am obţinut până la urmă rezultatul 9, atunci în coloana respectivă nu am mai scris nici o cifră.

La fel am procedat cu totalul obţinut din adunare. Prin adunările succesive efectuate, a rezultat numărul 5 pe care l-an scris sub acest total. Am adunat apoi coloana din dreapta şi am obţinut numărul 23. Şi cu acesta am procedat la fel, spunând 2 + 3 = 5, iar p 5 l-am scris sub 23. Cele două numere finale obţinute (în cazul nostru 5 şi 5) fiind egale, spunem că adunarea a fost bună.

La prima vedere, proba cu 9 apare, nu complicată, dar lungă. În realitate nu este aşa. Prin adunările succesive efectuăm un număr de operații egal sau cu foarte puțin mai mare decât atunci când facem proba adunând numerele de „sus în jos". Adunăm doar aceleaşi cifre, dar altfel grupate.

Explicația probei cu 9 este foarte simplă dacă ne gândim că orice număr este egal cu un multiplu de 9 mărit cu suma cifrelor lor sale luate ca simple unități. Astfel la numărul 8.375, vom avea:

$$\begin{array}{rcl} 8000 = 8\times 1000 &=& 8\times 999 + 8 = m9 + 8 \\ 300 = 3\times\ \ 100 &=& 3\times\ \ 99 + 3 = m9 + 3 \\ 70 = 7\times\ \ \ 10 &=& 7\times\ \ \ 9 + 7 = m9 + 7 \\ 5 = &=& 0\times\ \ \ 9 + 5 = m9 + 5 \\ \hline 8375 = &=& m9 + 8 + 3 + 7 + 5 \end{array}$$

Efectuând suma 8 + 3 + 7 + 5 = 23 şi mai departe 2 + 3 = 5, obținem numărul 5 care este restul împărțirii lui 8.375 prin 9. Acum, adunarea noastră are un număr de termeni. Suma resturilor împărțirilor acestor termeni prin 9, trebuie să fie egală cu restul care rămâne de pe urma împărțirii prin 9 a sumei acestor termeni. Aşa se explică de ce spunem că adunarea a fost bună, atunci când numărul obținut din însumarea cifrelor totalului luate ca simple unități a reieşit egal cu numărul obținut din sumarea cifrelor luate ca simple unități ale rezultatului adunării numerelor din coloana din dreapta.

### *188. Cum efectuăm unele scăderi rapide*

Tot mintal putem, în unele cazuri, să scădem un număr din altul, folosind o tehnică simplificată, care ne duce la un calcul rapid. Astfel, când scăzătorul este apropiat de un număr rotund calculăm diferența dintre descăzut şi scăzătorul rotunjit şi apoi la rest adăugăm, complementul până la rotunjire (prin complement până la rotunjire înțelegându-se acel număr care se adaugă unui număr dat pentru a se obține cel mai apropiat număr rotund dorit; de exemplu 13 este complementul lui 87 pentru rotunjirea la sută a lui 87; pentru rotunjirea la 2000 a numărului 1982, complementul este 18). Să facem, de exemplu, următoarea scădere: 2561 - 986. Vom spune, mintal bineînțeles:

2561 - 986 = 2561 - 1000 + 14 = 1561 + 14 = 1575.

La fel, dacă descăzutul este ceva mai mare decât un număr rotund se face diferența între numărul rotund şi scăzător, iar la rest se adaugă surplusul față de rotunjire. De exemplu, avem de efectuat diferența: 3019 - 1473. Vom spune tot mintal: 3019 - 1473 = 3000 - 1473 + 19 = 1527 + 19 = 1546.

Dacă termenii scăderii nu sunt numere apropiate de numere rotunde, putem găsi o altă metodă, rapidă de calcul. Împărțim cifrele fiecărui termen în câte două grupe şi începem scăderea cu cifrele care reprezintă ordinul mai înalt, adică de la stânga la dreapta. Exemplu 753 - 427. Vom spune, bineînțeles, tot mintal: 753 - 427, 7 - 4 = 3 şi 53 - 27 = 26, deci 326.

Cum procedăm însă dacă grupa a doua de cifre a scăzătorului ne dă un număr mai mare decât grupa a doua de cifre a descăzutului? Şi aici putem găsi o soluție

rapidă, recurgând la rotunjiri. Şi de data aceasta, tot un exemplu ne va lămuri. Să luăm scăderea 6359 - 4278. Iată cum vom proceda:

6359 - 4278 = (63 sute + 59) - (42 sute + 78) = (63 sute+ 59) - (43 sute - 22) = (63 sute - 43 sute) + (59 + 22) = 20 sute + 81 = 2.081.

Să nu vă speriaţi de lungimea aparentă a calculului! După puţin exerciţiu veţi vedea că într-adevăr este un *calcul rapid.* Totul se face mintal şi v-am spus doar că, gândirea lucrează mai repede ca vorbirea!

Procedând ca mai sus, putem găsi posibilitatea a face diferenţe rapide şi la numere mai mari.

### *189. Cum reducem timpul pentru înmulţirea unor numere formate din două cifre*

Ca aproape toate metodele de calcul rapid şi aceasta, pe care o vom vedea imediat, foloseşte calculul mintal. Evident că va trebui să şi scrieţi tot ce gândiţi, însă numai prin cifre.

- Să efectuăm înmulţirea a două numere mai mici ca 20, de exemplu, 14 x 17. Vom aşeza calculul astfel:

14 x Şi vom spune în gând:
17 - Adunăm un număr cu unităţile celuilalt număr 14 + 7 = 21 sau 17 + 4 = 21.
210
28
238

- Înmulţim suma cu 10, deci 210.
- Adunăm la această sumă produsul unităţilor, adică 210 + 4 x 7 = 210 + 28 = 238.

Acum, încercaţi şi dumneavoastră astfel de înmulţiri şi verificaţi-le prin metodele învăţate la şcoală. Veţi vedea că obţineţi aceleaşi rezultate. Să vedem şi cum s-a ajuns la această metodă de calcul. Dacă în locul unităţilor celor două numere punem două litere *a* şi *b,* înmulţirea noastră se poate scrie sub forma: (10 + a)x(10 + b) = (10 + a + b)10 + axb sau cu numerele de mai sus: (10 + 4)x(10 + 7) = (10 + 4 + 7)10 + 4 x 7 = 238.

Dar dacă cele două numere sunt mai mari ca 20? Dacă privim formula obţinută vedem imediat că putem să înmulţim între ele şi numere mai mari ca 20, cu condiţia ca *cifra zecilor să fie aceeaşi.* Să încercăm astfel înmulţirea 73 x 79. Vom avea după formulă: (70 + 3) x (70 + 9) = (70 + 3 + 9)(70 + 3 x 9) = 2.107. Calculul se aşează astfel:

73 Vom spune în gînd:
79 73 + 9 = 82 (sau 79 + 3 = 82),
82 x 70 $82\times70 = 82\times7\times10 = 5\ 740$
5740 $3\times9 = 27$
27 5740 + 27 = 5767
5767

Calculul se poate efectua şi mai rapid dacă cele două numere sunt apropiate de 100. Să înmulţim de exemplu 87 x 93. Dacă observăm că 87 = 100 - 13 şi 93 = 100

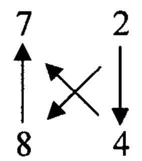
- 7 putem scrie: 87 x 93 = (100 - 13)x(100 - 7) = 100 x 100 -100 x 13 – 100 x 7 + 13 x 7 = 100[100 - (13 + 7)] + 13 x 7 = 80 x 100 + 91 = 8000 + 91 = 8091.

Să nu vă speriați de acest calcul lung, căci totul devine imediat foarte simplu dacă privim ultimele egalități. Iată ce ne spun aceste egalități: se calculează mintal diferența între 100 şi numerele date (adică complementele până la 100) - am găsit 13 şi 7, se scade din 100 suma complementelor, adică 100 - 20 = 80; la numărul obținut se alătură numărul dat de produsul 13 x 7 = 91 rezultat din înmulțirea complementelor. Deci rezultatul înmulțirii va fi: 87 x 93 = 8091.

Acum, după ce cunoaştem cele de mai sus, să încercăm următorul calcul rapid: 89 x 92. Vom spune în gând: 11, 8, 19, 81, 88. Deci rezultatul înmulțirii este 8188. În general, putem înmulți rapid două numere formate din câte două cifre folosind înmulțirea încrucişată a cifrelor.

Să înmulțim de exemplu 72 x 84. Vom avea: 2 x 4 unități + (4 x 7 + 2 x 8) zeci + 7 x 8 sute. Rezultatele operațiilor parțiale se scriu simultan, astfel cum se vede mai jos şi se adună pe coloane.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 44\phantom{0} \\ \underline{56\phantom{00}} \\ 6048 \end{array}$$




În dreapta se vede, schematic, cum se înmulțesc cifrele între ele. în fond nu am făcut decât să efectuăm o operație obişnuită, de înmulțire, care însă se poate executa într-un timp foarte scurt datorită faptului că rezultatele parțiale se pot scrie de odată. Asemenea înmulțiri se fac şi mai repede atunci când produsele dintre cifrele factorilor sunt mai mici ca 10. De exemplu 32 x 23.

### *190. O înmulțire se poate înlocui printr-o scădere*

Să înmulțim numărul 572 cu 97. Vom putea scrie:

572 x 97 = 572 x (100 - 3) = 572 x 100 – 572 x 3 = 57200 - 1716 = 55484. Practic, operația se aranjează în modul următor:

$$\begin{array}{r} 572\times 97 \\ \hline 57200- \\ 1716\phantom{-} \\ \hline 55484\phantom{-} \end{array}$$

Desigur că ați observat că ne convine să aplicăm această metodă numai în cazul când unul din factori este apropiat de 100, 1000,10000 etc. Altfel, calculul încetează a mai fi rapid.

### *191. Înmulțirea numerelor cu 9, 99, 999...*

Acestea sunt nişte înmulțiri interesante şi rezultatele se pot obține rapid datorită faptului că: 9 = 10 - 1, 99 = 100 - 1, 999 = 1.000 - 1 etc.

Până la urmă şi aici totul se reduce la înlocuirea unei înmulțiri printr-o scădere. Iată şi câteva exemple:

76 x 9= 76(10 - 1) = 760 -76 = 684

$$143 \times 99 = 143(100 - 1) = 14300 - 143 = 14157$$
$$56 \times 999 = 56(1000 - 1) = 56000 - 56 = 55944.$$

Deci cum vom proceda rapid în asemenea cazuri? Vom adăuga la dreapta deînmulţitului atâtea zerouri câţi de 9 cuprinde înmulţitorul şi din rezultatul obţinut vom scădea deînmulţitul.

### *192. Calcularea rapidă a pătratelor*

Scriem trei şiruri de numere, din care primul să fie şirul numerelor naturale începând cu 1, al doilea să cuprindă numerele impare începând cu 3, iar al treilea, pătratele numerelor din primul şir.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | <u>5</u> | 6 | 7 | ***8*** | 9 | 10 |
| 3 | 5 | 7 | <u>9</u> | 11 | 13 | ***15*** | 17 | 19 | 21 |
| 1 | 4 | 9 | <u>16</u> | 25 | 36 | ***49*** | 64 | 81 | 100 |

Adunând două numere suprapuse din al doilea şi al treilea rând, obţinem pătratul numărului următor din rândul întâi.

Exemple: $16 + 9 = 25 = 5^2$, $49 + 15 = 64 = 8^2$.

În felul acesta se poate forma rapid o tabelă de pătrate, operând simple adunări. Această metodă se justifică în modul următor: însemnăm cu *n* numărul din primul şir corespunzător celor două numere pe care le-am adunat. Numărul următor din primul şir va fi: $n + 1$, iar $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

Se observă că numărul din al doilea şir corespunzător lui n este $(2n + 1)$, iar cel din ultimul şir este respectiv $n^2$, de unde şi metoda pe care am folosit-o la calcularea rapidă a pătratelor.

Bazaţi pe cele de mai sus putem calcula foarte uşor pătratul unui număr dacă cunoaştem pătratul precedentului său din şirul numerelor naturale.

De exemplu, să se calculeze $26^2$ ştiind că $25^2 = 625$. Procedăm în modul următor:

$$\begin{array}{rr} 25^2 = & 625 \\ 2 \times 25 + 1 = & \underline{\ \ 51} \\ 26^2 = & 676 \end{array}$$

Pentru ridicarea la pătrat a numerelor care se termină cu 5 există o regulă şi mai practică:

Dăm la o parte pe 5. Numărul rămas se înmulţeşte cu numărul imediat superior acestuia în ordinea numerică. Rezultatul acestei înmulţiri reprezintă sutele pătratului căutat. Zecile şi unităţile sunt formate din produsul $5 \times 5 = 25$.

Să calculăm, de exemplu pe $85^2$. Separăm pe 5. Ne rămâne la stânga 8. Numărul imediat superior lui 8 în ordinea numerică este 9. Vom avea $85^2 = 8 \times 9$ sute $+ 5 \times 5 = 7225$. La fel, pătratul lui 125 se calculează rapid în modul următor:

$$\begin{array}{rr} 12 \times 13 = & 156 \\ \underline{\ \ \ \ \ \ 5^2 =} & \underline{\ \ \ 25} \\ 125^2 \ = & 5625 \end{array}$$

Doriţi justificarea metodei? Este foarte simplă dacă ne gândim că orice număr se poate scrie sub forma unei sume formată din două părţi: o parte care cuprinde unităţile numărului şi toată partea rămasă la stânga care conţine zecile lui.

însemnând cu $N$ numărul zecilor unui număr terminat cu 5, îl vom putea scrie deci pe acesta sub forma 10N + 5. Acum, ridicând la pătrat numărul scris sub această formă, vom avea $(10N + 5)^2 = 100N^2 + 2 \times 5 \times 10N + 5^2$ sau $(10N \times 5)^2 = 100N(N + 1) + 25$.

### *193. Un joc cu calcularea rapidă a rădăcinilor cubice*

Înainte de toate, să învățăm secretul jocului. Pentru aceasta să calculăm cuburile numerelor de la 1 până la 9. Obținem următorul tabel:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numere | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Cuburi | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

Dacă pornim cu cititul tabelei de jos în sus putem spun că în rândul întâi avem rădăcinile cubice ale numerelor din rândul al doilea. Privind cu atenție tabela, observăm că din cele nouă cuburi, cinci se termină cu cifra rădăcinilor. Astfel, cubul lui 4 se termină cu 4, al lui 5 sfârşeşte cu 5 şi aşa mai departe. Între restul de patru numere şi cuburile lor există următoarea corespondență: cubul lui 2 este 8, iar cubul lui 8 se termină cu 2; cubul lui 3 se termină cu 7, iar cubul lui 7 are ca cifră finală un 3.

Să calculăm şi cuburile numerelor din 10 în 10, de la 10 până la 100. Pentru aceasta nu avem decât să adăugăm câte 3 zerouri la cuburile de mai sus şi vom avea următorele:

| | |
|---|---|
| $10^3 = 1000$ | $60^3 = 216000$ |
| $20^3 = 8000$ | $70^3 = 343000$ |
| $30^3 = 27000$ | $80^3 = 512000$ |
| $40^3 = 64000$ | $90^3 = 729000$ |
| $50^3 = 125000$ | $100^3 = 1000000$ |

Cubul oricărui număr format din două cifre va fi sau unul din numerele din tabela a doua sau va fi cuprins între două din aceste numere. De exemplu, cubul lui 57 va fi cuprins între 125000 şi 216000, al lui 94 între 729000 şi 1000000 şi aşa mai departe.

Mai trebuie să observăm că: orice cub al unui număr va trebui neapărat să aibă ca unitate aceeaşi cifră pe care o are rădăcina lui cubică, afară de cazul când această rădăcină are ca unitate una din cifrele 2, 3, 7 sau 8, care urmează regula corespondenței arătată la prima tabelă.

Cele spuse mai sus ne dau posibilitatea să reținem uşor în memorie prima şi deci şi a doua tabelă. Acum vine jocul!

Spunem cuiva să-şi aleagă un număr oarecare format din una sau două cifre şi să-l ridice la cub. Eventual să caute într-un tabel a unui formular un astfel de cub şi să ni-l comunice, bineînțeles fără să ne spună şi care este rădăcina lui. Noi ne angajăm să calculăm rapid şi mintal rădăcina lui cubică.

Dacă ni se comunică un număr mai mic ca 1.000, atunci nu trebuie să ne gândim decât la ultima lui cifră şi am extras imediat rădăcina cubică. De exemplu, partenerul nostru pronunță numărul 729. Acest număr se termină cu 9, deci rădăcina cubică este 9. Dacă ni se cere rădăcina cubică a lui 512, care se termină cu 2, vom spune 8.

În cazul când ni se comunică un număr mai mare ca 1000, rădăcina cubică este un număr format din două cifre. Se spune că ni se cere rădăcina cubică a lui 39304. Fiind vorba de 39000, adică un număr cuprins între 27000 şi 64000, rădăcina lui cubică va avea ca zeci cifra 3. Numărul dat fiind terminat cu 4, rădăcina lui cubică se va termina şi ea cu 4. Vom răspunde deci imediat: 34.

Un alt exemplu: ni se dă 250.047. Vom spune: numărul fiind cuprins între 216000 şi 343000 are ca zeci cifra 6. Se termină cu 7, deci are ca unități cifra 3. Prin urmare, rădăcina cubică a lui 250047 este 63.

Numai după cîteva exerciții de felul acesta devenim maeştri în căutarea rădăcinilor cubice a numerelor de la 1 până la 1000000.

### *194. Despre Inaudi şi calculele sale rapide*

Giacomo Inaudi a fost un mic păstor italian născut la Onorato (Piemonte) în 1867. Copil încă, micul păstor a reuşit să-i uimească pe cei din jurul său prin uşurința şi rapiditatea cu care efectua calcule aritmetice cu numere foarte mari. Având această însuşire extraordinară, a fost îndemnat să-şi schimbe meseria. Inaudi a început să umble din oraş în oraş, dând reprezentații prin bâlciuri şi localuri diverse, expunându-şi aptitudinea lui excepțională pentru calcule aritmetice şi, dezvoltându-şi în acelaşi timp, printr-un exercițiu continuu, memoria sa specială a numerelor.

La vârsta de 13 ani, în 1880, a fost condus la Paris, unde a obținut continuu succese în fața publicului curios, iar în 1892 apăru chiar în fața Academiei de Ştiințe din acest oraş. Cu o rapiditate uluitoare el execută numai mintal toate calculele extrem de dificile care i-au fost cerute.

Desigur că Inaudi reuşise să cunoască între timp şi proprietățile numerelor, ceea ce îl ajută foarte mult la efectuarea rapidă a calculelor sale mintale. El însă avea procedeele sale, o tehnică proprie a calculului. Iată de exemplu cum efectua Inaudi o înmulțire a două numere, cum ar fi 384 cu 579:

$$\begin{array}{rcl} 500 \times 300 & = & 150000 \\ 500 \times 84 & = & 42000 \\ 384 \times 70 & = & 26880 \\ \underline{384 \times 9} & \underline{=} & \underline{3456} \\ \textit{Total} & = & 222336 \end{array}$$

Metoda este justă pentru că: 579 x 384 = (500 + 79) x 384 = 500 x 384 + 79 x 384 = 500 x 300 + 500 x 84 + 384 x 70 + 384 x 9.

# *Capitolul 11 Câteva probleme celebre de aritmetică*

### *195. Şcoala lui Pitagora*

Policrate, tiranul Siracuzei, îl întreabă într-o zi pe Pitagora:

- „O Pitagora, gloria Heliconului şi răsfăţatul Muzelor! Spune-mi câţi discipoli frecventează şcoala ta? Câţi lacomi de ştiinţă ascultă aproape de tine înţelepciunile învăţătorului?"

- „Iată, Policrat, întipăreşte-ţi adânc în mintea ta ceea ce-ţi voi spune: o jumătate studiază frumoasele ştiinţe ale matematicii, ştiinţa luminii şi adevărului; un sfert lucrează să descopere legile nemuritoare care guvernează natura; a şaptea parte meditează în tăcere asupra tuturor celor ce ascultă; în afară de aceştia mai sunt încă trei femei."

Nu ştim dacă tiranul Siracuzei a putut până la urmă să cunoască numărul elevilor din şcoala celebrului filozof şi matematician, dar noi vom încerca să-l aflăm.

Toţi bărbaţii aflaţi în şcoala lui Pitagora însumează $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{25}{28}$ din numărul total al elevilor. Deci un bărbat reprezintă $\frac{1}{28}$ din acest număr. Adică numărul total al elevilor a fost 28.

Acest număr este verificat şi de ultima parte a problemei, care ne spune că mai sunt încă 3 femei. Cu aceste 3 eleve se completează totalul de $\frac{28}{28}$.

### *196. Bacus şi Silenius*

Printre numeroasele zeităţi din mitologia romană apare şi Bacus, zeul vinului, fiul lui Jupiter şi al Semelei. Tatăl lui adoptiv a fost zeul Silenius, bufonul zeilor din Olimp. De la Silenius, Bacus a învăţat nu numai cultura viţei de vie, dar şi arta de-a bea. Ne-o dovedeşte şi soluţia următoarei probleme:

„Bacus, profitând de ocazia că Silenius, părintele său adoptiv, adormise lângă butoiul său de vin, a băut din acesta o bună cantitate. Curând însă Silenius s-a trezit şi, furios că fiul şi elevul său începuse să-i golească butoiul, s-a gândit să-şi înece necazul în vin. Nevrând să bea singur, îl pofti, pe Bacus la o întrecere. Bacus bău mai întâi 6 măsuri. Apoi începu şi Silenius să bea. El înghiţea 3 măsuri, în timp ce Bapus bea 5 măsuri. Legenda spune că după ce Bacus băuse de două ori cât Silenius ei au căzut beţi de odată. Puteţi să spuneţi câte măsuri a băut fiecare din aceşti zei?"

Deci Bacus a avut un avans faţă de Silenius de 6 măsuri de vin. Dacă Bacus ar fi băut la fiecare repriză, 6 măsuri în timp ce Silenius înghiţea numai 3 măsuri, ar fi fost continuu câştigător cu 2 la 1. Dar Bacus bea numai 5 măsuri în acest timp. Deci la fiecare 3 măsuri ale lui Silenius, lui Bacus îi lipsea câte o măsură. Din această rezervă, Bacus n-a putut să, ia decât de 6 ori, adică trebuie să socotim că Bacus a băut împreună cu Silenius în 6 reprize. Prin urmare Silenius a băut 6 x 3 = 18 măsuri, iar Bacus 2 x 18 = 36 măsuri.

***197. Epitaful lui Diofante***

Diofante a fost un mare matematician care a trăit în Alexandria din Egipt între anii 150 şi 250 e.n. Prin problemele lui, rămase celebre, el apare ca un inițiator al algebrei. În viață fiind, el a pus să se sape, în limba latină, pe piatra care urma să-i acopere mormântul, următorul epitaf: „În acest mormânt se află Diofante. O minune! Această piatră îți spune exact cât a trăit el. O şesime din viața lui şi-a petrecut-o în copilărie; apoi timp de o douăsprezecime s-a dezvoltat ca adolescent. El mai petrecu astfel o şeptime din viața sa până s-a însurat. La cinci ani după căsătoria sa, el capătă un fiu, care vai!, după ce atinse jumătate din vârsta tatălui său, nenorocitul muri. Timp de patru ani încă, tatăl său îşi mângâie durerea cu studiul cifrelor, după care şi el ajunse la sfârşitul vieții sale."

Acum, să ne gândim câți ani a trăit Diofante. Dacă adunăm toate fracțiile din viața sa date în textul epitafului, vom avea $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{75}{84}$ din anii trăiți de Diofante.

La această cantitate trebuie să mai adăugăm cei 5 ani care au trecut de la căsătoria lui Diofante până la naşterea copilului şi încă 4 ani pe care i-a petrecut de la moartea fiului său până ce el însuşi a încetat din viață. Deci în total 9 ani. Aceşti 9 ani reprezintă diferența de la $\frac{75}{84}$ din viața lui Diofante până la restul vieții lui, adică până la $\frac{84}{84}$. Prin urmare, 9 ani sunt egali cu $\frac{9}{84}$ din viața lui Diofante.

Rezultă deci că celebrul matematician a trăit 84 ani.

Acesta nu este singurul caz când vârsta unui om este înscrisă pe mormântul lui printr-o şaradă. Pe mormântul domniței Sultana Racoviță, aflat la biserica Golia din Iaşi, este o inscripție grecească în versuri care, în limba română, se termină astfel:

„Ci soarta m-a răpit în pământul Misienilor
În anul al treilea şi o mie al lui Hristos
Plus cinci zeci şi şapte ori o sută
În ziua de sâmbătă a lui ianuarie
Cam pe la început, adică a doua zi."

Profesorul Ion Ionescu, care citează aceste versuri, dă şi o rezolvare a problemei şi stabileşte anul 1753 ca an al morții acestei domnițe. El controlează această dată calculând câte zile şi câte săptămâni au trecut de la începutul erei noi până la 2 ianuarie stil vechi 1753 şi găseşte că acea zi a fost o sâmbătă. în acest control el porneşte de la faptul cunoscut că prima zi a erei noi a fost tot o sâmbătă.

***198. O veche problemă indiană cu albine şi flori***

Bhaskara Aciarya sau „înțeleptul" a fost un renumit matematician indian din sec. XII. El a fost primul care a expus în mod clar sistemul zecimal. Opera lui cea mai de seamă este „Sid-dhîn-tasciromani": o carte în care problemele de matematică sunt expuse sub formă de povestiri sau poezii şi sunt ilustrate cu ghirlande de flori, albine, fluturi şi păsărele. Felul atractiv în care Bhaskara a expus problemele lui ne dovedeşte cât de mult acest înțelept iubea matematica şi câtă silință a depus el ca

această ştiință considerată de unii abstractă, aridă şi accesibilă numai unui număr restrâns de oameni, să poată fi înțeleasă şi învățată de oricine se va apropia de ea. El a prezentat matematica într-devăr ca ceva plăcut şi util. Iată una din aceste probleme:

A cincea parte a unui roi de albine se aşază pe o floare kadambu, a treia parte pe o floare de silhindri; de trei ori diferența acestora a zburat pentru a se duce pe o floare de kuta, iar o albină a rămas zburând în aer atrasă de mirosul unor flori de iasomie şi de pandanus. Spune-mi, tinere, câte albine erau?

Într-adevăr o problemă frumos expusă. Numai pentru mulțimea şi variația florilor din enunțiul ei, încă merită să ne ocupăm de ea. Pentru o uşoară rezolvare, să separăm albina care a rămas zburând în aer, de celelalte care s-au aşezat pe flori. De altfel, ea s-a izolat singură şi fără intervenția noastră.

Albinele care s-au aşezat pe flori însumează $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$ din întregul roi. Efectuând suma acestor fracții obținem: $\frac{1}{5}+\frac{4}{3}-\frac{3}{5}=\frac{3}{15}+\frac{20}{15}-\frac{9}{15}=\frac{14}{15}$ din întregul roi.

Dar albina care a rămas zburând în aer atrasă de mirosul unor flori de iasomie şi pandanus reprezintă restul roiului, adică $\frac{1}{15}$. Urmează că tot roiul are 15 albine.

### *199. Vacile lui Newton*

Genialul fizician şi matematician englez Isaac Newton (1642 - 1727), cunoscut în special prin celebra lui *„lege a atracției universale"* a scris, printre altele, şi o „Aritmetică universală". În această carte apare o problemă cu nişte vaci care pasc iarba unor livezi. Problema a fost pusă de Newton, teoretic, în felul următor: „*a* vaci pasc iarba de pe *b* livezi în *c* zile; *a'* vaci pasc iarba de pe *b'* livezi în *c'* zile; *a"* vaci pasc iarba de pe *b"* livezi în *c"* zile. Există oare o relație între aceste nouă cantități, şi dacă da, care este acea relație? Se presupune că pe fiecare unitate de arie a acestor livezile se produc cantități egale de iarbă şi că ea creşte în mod uniform în timp ce fiecare vacă, paşte zilnic aceeaşi cantitate."

Bizară problemă, nu-i aşa?! Şi într-adevăr, ea a fost de mult trecută printre curiozitățile matematice. Ne vom pune problema aceasta sub o formă mai simplă şi numeric. Iarba unei livezi de 48 ari a fost păscută de 75 vaci în 12 zile, iar 81 vaci au consumat în 15 zile iarba unei alte livezi de 72 ari. Câte vaci se vor putea hrăni cu iarba de pe livadă de 96 ari în timp de 18 zile?

Se presupune că în momentul când vacile au început să pască, iarba în livezi avea aceeaşi înălțime şi desime şi că ea a continuat să crească în mod uniform, în timp ce fiecare vacă păştea zilnic aceeaşi cantitate. Rezolvarea problemei se reduce în fond la aflarea cantității de iarbă care creşte într-o zi pe un ar. Fiind vorba de creştere constantă, să numim *rație* această cantitate de iarbă. În primul rând vom căuta să găsim legătura care există între această rație şi celelalte date ale problemei.

Pentru aceasta este bine să aducem datele problemei la acelaşi termen de comparație. De aceea vom căuta să avem acelaşi număr de vaci şi zile pe primele două păşuni şi să găsim apoi o unitate de măsură unică pentru cantitatea de iarbă pe care o paşte o vacă. Este metodă care se foloseşte la rezolvarea unor probleme mai grele de aritmetică şi care se numeşte chiar *metoda aducerii la acelaşi termen de comparație.* Vom ajunge acolo unde dorim, transformând succesiv datele problemei. Aşadar, pe lângă iarba care se afla la început în cele 3 livezi,

prima cireada a mai păscut 60 x 12 = 720 rații,
a doua cireada a mai păscut 72 x 15 = 1080 rații,
a treia cireada a mai păscut 96 x 18 = 1728 rații.

Prima cireada a consumat în 12 zile iarba care a existat la intrarea ei în livadă pe cei 60 ari şi încă 720 rații. Deci într-o zi, această cireada paşte:

$$\frac{60 \text{ ari}}{12}+\frac{720 \text{ raț}}{12}=5 \text{ ari}+60 \text{ raț}.$$

Împărțind această cantitate prin 75 obținem consumul de iarbă care revine unei vaci într-o zi pe prima păşune, adică: $\frac{5 \text{ ari}}{75}+\frac{60 \text{ raț}}{75}=\frac{1 \text{ ari}}{15}+\frac{4 \text{ raț}}{5}$.

Pentru ca în această livadă să poată să pască cele 81 vaci timp de 15 zile, ea va trebui să conțină $81 \times 15\left(\frac{1}{5}\text{ari}+\frac{4}{5}\text{raț}\right)=81 \text{ ari}+972 \text{ raț}$, adică iarba aflată la început pe 81 ari şi încă 972 rații.

Însă această cantitate de iarbă trebuie să fie egală cu aceea pe care o consumă aceeaşi cireada de 81 vaci, tot în 15 zile, de pe păşunea care i s-a atribuit ei. Cum în această păşune ea paşte 72 ari plus 1.080 rații, urmează că 81 ari + 972 rații = 72 ari + 1.080 rații.

Împărțind prin 9 ambele părți ale acestei egalități avem 9 ari + 108 rații = 8 ari + 120 rații, de unde rezultă că 1 ar = 12 rații, adică iarba care se află pe un ar la intrarea vacilor în livezile lor era egală cu 12 rații.

Acum, având aceeaşi unitate de măsură, rația, putem spune că iarba păscută de prima cireada va fi 60 x 12 rații + 720 rații = 1.440 rații, iar o vacă a păscut într-o zi $\frac{1440}{75 \times 12}=1{,}6$ rații.

De altfel, la acelaşi rezultat ajungem, dacă în loc să folosim datele privind prima cireada folosim pe cele ale cirezii a doua. Iată:

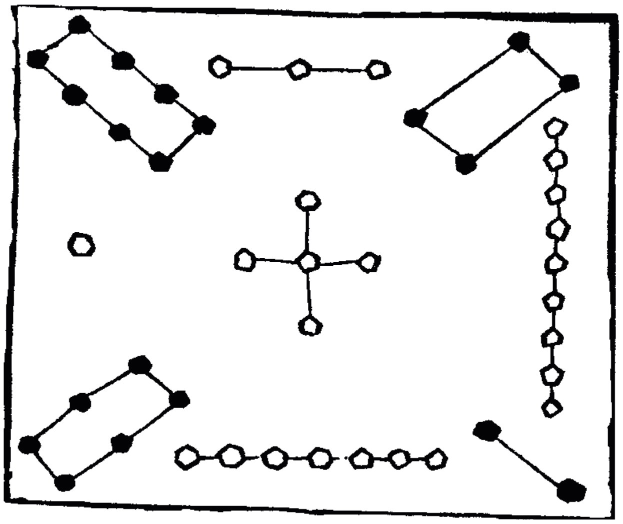
$$\frac{72 \times 12 \text{ raț}+1080 \text{ raț}}{81 \times 15}=\frac{1944 \text{ raț}}{1215}=1{,}6 \text{ rații}.$$

Restul este foarte simplu. Iarba aflată pe a treia livadă la începerea păscutului echivalentă cu 96 x 12 = 1152 rații. Între timp au mai crescut 1.728 rații. Deci în total, 2.880 rații, de unde pe zi revin: $\frac{2880}{18}=160$ rații, şi prin urmare vor putea paşte în această livadă $\frac{160}{1{,}6}=100$ vaci.

# *Capitolul 12 Numere aşezate în figuri*

***200. Despre nişte figuri dintr-o foarte veche carte chinezească***

Într-o foarte veche carte chinezească, intitulată „Cartea transformărilor", scrisă acum vreo 3000 de ani, se găseşte un pătrat în care se află nouă desene distincte, formate din puncte albe şi negre, unite prin linii drepte. Figura de mai jos este o reproducere a acestui pătratcu desenele sale.



***Pătrat magic cu numerele 1, ..., 9 de origine chineză***

Aceste desene nu reprezintă decât un mod de a scrie numerele, folosit de chinezi în acele timpuri. Fiecare desen înfăţişează un număr corespunzător numărului de puncte cuprins în el. Numerele pare, numite la chinezi, după cum am văzut, feminine, sunt reprezentate prin puncte negre, iar cele impare sau masculine, prin puncte albe. Sunt deci în total nouă numere şi dacă le privim cu atenţie observăm că ele sunt aşezate pe trei rânduri.

Dacă aşezăm aceste numere într-un pătrat împărţit în nouă pătrăţele egaleşi le scriem cu semnele pe care le folosim noi pentru numere, vom obţine pătratul de mai jos:

| | | |
|---|---|---|
| *4* | *9* | *2* |
| *3* | *5* | *7* |
| *8* | *1* | *6* |

Chinezii scriau de la dreapta la stânga şi de sus în jos, aşa că pentru a reproduce, în ordinea aşezării lor, numerele din notaţia chinezească în notaţia noastră, a trebuit să rotim cu $90^0$ pătratul din „Cartea transformărilor".

Acum să vedem ce putem constata deosebit la numerele din acest pătrat, căci trebuie să presupunem că ele au fost aşezate cu un rost anume. Observăm mai întâi că s-au folosit toate numerele de la 1 până la 9 fără repetiţie. Apoi, suma acestor numere, indiferent dacă o luăm pe orizontală, pe verticală sau pe diagonală este întotdeauna 15.

Un asemenea de pătrat a fost denumit încă din timpuri străvechi *pătrat magic.* Numărul constant, care se obţine însumând numerele din pătrat pe orizontală,

verticală şi diagonale, se numeşte *constanta* pătratului magic. În cazul nostru, constanta pătratului magic este 15.

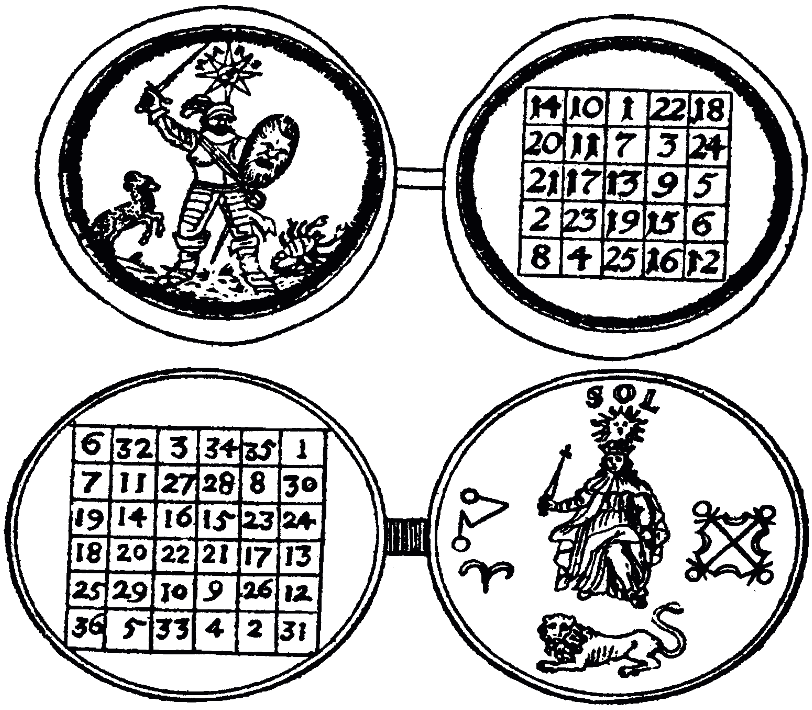
În general, se numesc magice, figurile geometriceîn care aşezând o serie de numere într-o anumită ordine, şi efectuând anumite operații cu aceste numere, se obține întotdeauna un rezultat constant.

Cele nouă numere de la 1 la 9 le putem aşeza în interiorul pătratului într-o altă ordine obținând aceeaşi constantă, aşa cum se vede mai jos.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

În afară de pătrate magice, se pot construi triunghiuri magice, stele magice, poligoane magice şi poliedre magice, după modul în care se dispun numerele. Cel mai vechi pătrat magic şi poate chiar cea mai veche figură magică pe care o cunoaştem este pătratul reprodus din „Cartea transformărilor."

Numele de „magic" nu are nici o legătură cu fondul matematic al acestor figuri, care este real, frumos şi amuzant ca şi oricare joc de cifre şi numere. Anumiți şarlatani din antichitate, voind să profite de starea de înapoiere culturală a oamenilor, au dat acest nume figurilor pomenite, datorită particularităților constante pe care le prezenta aşezarea numerelor respective. Ei fabricau amulete din pergament sau diverse metale, uneori chiar prețioase, având înscrise pe ele figuri magice cu diverse combinații de numere şi le vindeau apoi naivilor, ca apărătoare de boli sau alte rele...




***Amulete cu figuri şi pătrate magice***

În unele țări înapoiate din punct de vedere economic şi social-cultural, mai circulă şi astăzi astfel de amulete. În Europa, pătratele magice au venit din India,

aduse probabil de diverşi astrologi. Unii matematicieni europeni s-au ocupat cu alcătuirea figurilor magice şi au găsit chiar formule, în special pentru construirea pătratelor magice de diferite ordine. Celebrul matematician Fermat afirma că nu cunoaşte „nimic mai frumos în aritmetică” ca figurile magice.

### *201. Un pătrat magic pe un tablou celebru*

În Evul Mediu plin de superstiții, figurile magice au avut epoca lor de glorie. Pe un tablou al celebrului pictor german Albrecht Dtirer, „Melancolie”, executat în anul 1514, se găseşte un pătrat magic. în acest pătrat suma numerelor pe orizontală, verticală şi diagonală este 34. Pătratul magic al lui Durer mai prezintă şi alte particularități. Cele două numere de la mijlocul ultimei orizontale reprezintă la un loc 1514, anul în care Dtirer a executat tabloul „Melancolie”.

Constanta pătratului, numărul 34, nu rezultă numai din adunarea numerelor de pe orizontală, verticală şi diagonale, dar ea se regăseşte şi făcând:

suma numerelor din vârfurile pătratului: 16 + 13 + 4 + 1 = 34;
suma numerelor medii ale orizontalelor extreme: 3 + 2 + 15 + 14 = 34;
suma numerelor medii ale verticalelor extreme: 5 + 9 + 8 + 12 = 34;
suma celor patru numere care formează pătratul central: 10 + 11 + 6 + 7 = 34.

### *202. Unele proprietăți ale pătratelor magice*

Bineînțeles că: nu este vorba de proprietăți magice, ci matematice. Cunoaşterea acestor proprietăți ne va ajuta la construirea unor pătrate magice. Iată câteva dintre ele:

- Un pătrat rămâne magic; dacă-i mărim sau dacă-i micşorăm fiecare din elementele sale cu acelaşi număr. Astfel dacă în pătratul magic din stânga figurii, care are constanta 34, adunăm la fiecare număr, numărul 5, obținem pătratul din dreapta figurii despre care spunem că este de asemenea magic. Evident că trebuie să fie aşa, deoarece adăugând numărul 9 la fiecare element al primului pătrat, fiecare orizontală, verticală şi diagonală a sa s-a mărit cu numărul constant 4 x 5 = 20. Constanta noului pătrat magic este deci: 34 + 4 x 5 = 54.

***a***

| | | | |
|---|---|---|---|
| *16* | *2* | *3* | *13* |
| *5* | *11* | *10* | *8* |
| *9* | *7* | *6* | *12* |
| *4* | *14* | *15* | *1* |

***b***

| | | | |
|---|---|---|---|
| *21* | *7* | *8* | *18* |
| *10* | *16* | *15* | *13* |
| *14* | *12* | *11* | *17* |
| *9* | *19* | *20* | *6* |

***Un pătrat magic rămâne tot magic dacă-i micşorăm sau dacă-i mărim fiecare din elementele sale cu acelaşi număr***

- Dacă pornim de la pătratul magic din figura ***b*** putem ajunge la acela din figura ***a*** prin scăderea numărului 5 din fiecare element, bazându-ne pe aceleaşi considerente.

- Cele de mai sus ne duc la concluzia că putem înmulți sau împărți fiecare număr al unui pătrat magic prin acelaşi număr, obținând până la urmă tot un pătrat magic. Este firesc să fie aşa pentru că, în definitiv, o înmulțire este o succesiune de adunări, iar o împărțire, o succesiune de scăderi.

- Dacă numerele unui pătrat magic sunt primii termeni ai şirului natural, el va rămâne magic dacă-i înlocuim numerele printr-un acelaşi număr de întregi consecutivi. Acest adevăr reiese chiar din modul în care am construit pătratul magic din figura ***b*** servindu-ne de numerele pătratului magic din figura ***a*** care cuprinde primii termeni ai şirului natural. în pătratul magic din figura ***a*** avem termenii 1, ..., 16, iar în cel din figura ***b*** apar termenii consecutivi 5,..., 21.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *10* | *18* | *1* | *14* | *22* |
| *4* | *12* | *25* | *8* | *16* |
| *23* | *6* | *19* | *2* | *15* |
| *17* | *5* | *13* | *21* | *9* |
| *11* | *24* | *7* | *20* | *3* |

***a***

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *11* | *24* | *7* | *20* | *3* |
| *4* | *12* | *25* | *8* | *16* |
| *23* | *6* | *19* | *2* | *15* |
| *17* | *5* | *13* | *21* | *9* |
| *10* | *18* | *1* | *14* | *22* |

***b***

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *3* | *24* | *7* | *20* | *11* |
| *16* | *12* | *25* | *8* | *4* |
| *15* | *6* | *19* | *2* | *23* |
| *9* | *5* | *13* | *21* | *17* |
| *22* | *18* | *1* | *14* | *10* |

***c***

- În fine chiar în acelaşi pătrat magic putem opera unele schimbări şi pătratul să rămână totuşi magic. Totul este ca schimbările operate să corespundă unei simetrii. Astfel, să luăm pătratul magic din stânga pătratelor de mai sus, care are constanta 65, la care să facem o schimbare simetrică. Să schimbăm între ele două orizontale echidistante, de exemplu prima şi a cincea. Vom obține pătratul din dreapta figurii, în acest pătrat orizontalele şi-au păstrat constanta. De asemenea şi-au păstrat constanta şi verticalele, deoarece prin schimbarea operată nu am modificat decât ordinea numerelor şi nicidecum mărimea lor. Diagonalele însă n-au mai rămas aceleaşi. într-o diagonală numerele 10 şi 3 s-au înlocuit respectiv prin 11 şi 22, iar în a doua diagonală, numerele 22 şi 11 respectiv prin 3 şi 10. Prima diagonală a devenit 85, iar a doua 45. Pătratul, în acest caz, nu mai este magic. A devenit „semimagic".

Ca noul pătrat să redevină magic, trebuie să mai facem o schimbare simetrică, astfel ca fiecare diagonală să-şi păstreze toate numerele avute în primul pătrat. Se vede uşor că de data aceasta va trebui să operăm asupra verticalelor, făcând o schimbare „de acelaşi rang". Aceasta înseamnă să schimbăm între ele verticala prima cu a cincea. Până la urmă se obține pătratul din partea de jos a figurii, care este magic şi bineînțeles, tot cu constanta 65.

### *203. Cum construim un pătrat magic*

De la început trebuie să facem o distincție între pătratele magice pare şi impare, adică între cele care au pe o latură un număr par sau impar de pătrățele. Pentru că un pătrat magic este în definitiv „un pătrat", laturii sale i se spune, în terminologia obişnuită, „rădăcină". Şi aşa trebuie să fie, deoarece numărul pătrățelelor de pe o latură a pătratului magic reprezintă rădăcina pătrată a numărului de pătrățele ale întregului pătrat.

Unele din metodele folosite la construirea pătratelor magice pare nu sunt bune pentru construirea celor impare şi invers. Chiar şi la pătratele magice pare, la aplicarea uneia sau alteia din metodele de construire, se face deosebirea între acelea a căror rădăcină este divizibilă numai prin 2 („pătrate impare pare") şi acelea la care rădăcină este un multiplu de 4.

Una din cele mai practice metode pentru construirea pătratelor magice impare este aceea indicată de Bachet. Claude Gaspar Bachet de Meziriac, matematician francez, a scris prin anul 1612 prima carte cunoscută de aritmetică distractivă intitulată „Problemes plaisants et delectables qui se font par Ies nombres”. în traducere, acest titlu ar suna: „Probleme plăcute şi distractive care se fac cu numere”.

Bachet nu a dat nici o demonstrație a metodei sale ci, aşa cum spune la începutul expunerii sale... „după ce am *speculat* mult asupra acestei probleme, am găsit în fine o regulă foarte frumoasă şi foarte uşoară pentru toate pătratele impare...”. Procedeul lui Bachet a fost demonstrat mai târziu, de abia la sfârşitul secolului trecut, de profesorul francez Labosne care s-a ocupat cu reeditarea lucrării lui Bachet. Iată metoda lui Bachet aplicată la construirea unui pătrat magic cu latura de 5:

Se construieşte un pătrat cu 5 x 5 = 25 pătrățele. Pătrățelele se prelungesc la exteriorul acestui pătrat cu linii punctate, în trepte, astfel cum se vede în figura *a.* Cu primele 25 de numere ale şirului natural se completează pătrățelele exterioare şi interioare după direcția unei diagonale a pătratului inițial. Se observă că din cauza simetriei, fiecare diagonală a acestui pătrat este completată cu câte 5 numere echidistante din şirul natural. De aceea suma acestor numere luată pe o diagonală sau pe cealaltă va fi aceeaşi. Ea va fi constanta pătratului magic ce se construieşte.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | | | | |
| | | | 6 | | 2 | | | |
| | | 11 | | 7 | | 3 | | |
| | 16 | | 12 | | 8 | | 4 | |
| 21 | | 17 | | 13 | | 9 | | 5 |
| | 22 | | 18 | | 14 | | 10 | |
| | | 23 | | 19 | | 15 | | |
| | | | 24 | | 20 | | | |
| | | | | 25 | | | | |

Mai departe, toate numerele care se află în exteriorul pătratului inițial se mută în interiorul lui, astfel ca fiecare din ele să vină pe aceeaşi orizontală sau verticală şi în al cincilea pătrățel socotit de la pătrățelul următor celui în care se află înscris numărul. Până la urmă se obține pătratul următor. Se poate imediat verifica că acest pătrat este magic şi are constanta 65.

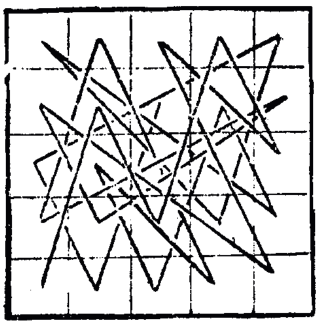
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 24 | 7 | 20 | 3 |
| 4 | 12 | 25 | 8 | 16 |
| 17 | 5 | 13 | 21 | 9 |
| 10 | 18 | 1 | 14 | 22 |
| 22 | 6 | 19 | 2 | 15 |

Dacă am fi vrut să construim un pătrat magic cu latura de 7, ar fi trebuit să folosim şirul natural al numerelor până la 7 x 7 = 49. În acest caz şi mutarea numerelor exterioare ar fi trebuit făcută în interiorul pătratului inițial numărând câte 7 pătrățele.

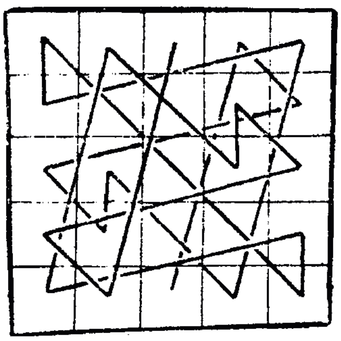
Acum dacă doriți să construiți şi altfel de pătrate magice, nu aveți decît să vă folosiți de pătratele magice obținute pe această cale şi să aplicați numerelor din figuri mişcări sau modificări, ajutându-vă de proprietățile pătratelor magice arătate mai sus.

***204. O caracteristică... decorativă a unor pătrate magice***

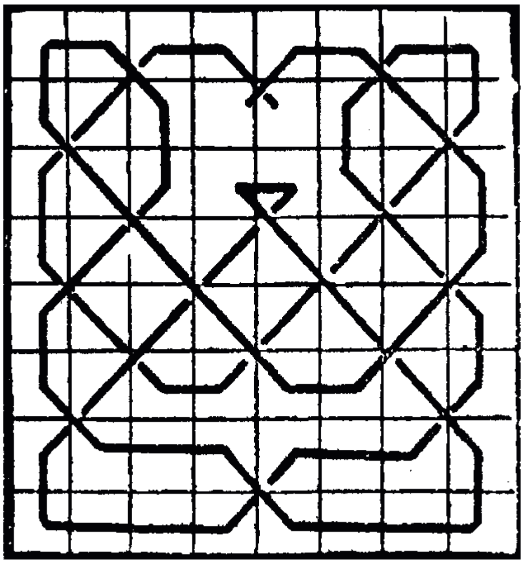
Dacă unim prin segmente de dreaptă centrele pătrățelelor unui pătrat magic în ordinea succesiunii numerelor, obținem o linie frântă, care constitue o diagramă caracteristică a respectivului pătrat. De pildă, diagrama unui pătrat magic având constanta 65 este reprezentată în figura de mai jos.



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 13 | 20 | 22 | 4 |
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 3 | 10 | 12 | 19 | 21 |
| 14 | 16 | 23 | 5 | 1 |
| 25 | 2 | 9 | 11 | 18 |



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 8 | 1 | 24 | 17 |
| 16 | 14 | 7 | 5 | 23 |
| 22 | 20 | 13 | 6 | 4 |
| 3 | 21 | 19 | 12 | 10 |
| 9 | 2 | 25 | 18 | 11 |



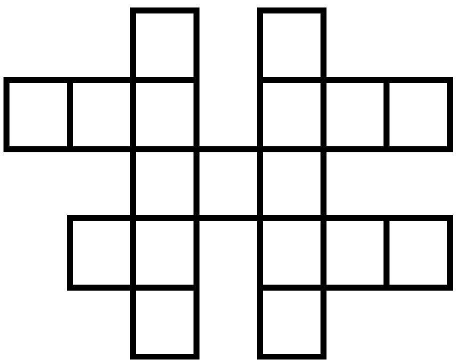
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 15 | 62 | 63 | 2 | 3 | 50 | 51 |
| 13 | 61 | 16 | 1 | 64 | 49 | 4 | 52 |
| 60 | 12 | 17 | 32 | 33 | 48 | 53 | 5 |
| 59 | 18 | 11 | 34 | 31 | 54 | 47 | 6 |
| 19 | 58 | 35 | 10 | 55 | 30 | 1 | 46 |
| 20 | 36 | 57 | 56 | 9 | 8 | 29 | 45 |
| 37 | 21 | 22 | 23 | 42 | 43 | 44 | 28 |
| 38 | 39 | 40 | 41 | 24 | 25 | 26 | 27 |

Sunt însă unele pătrate magice la care aranjarea numerelor dă naştere la diagrame de un desen elegant, cum este cazul pătratului magic de mai sus. Acesta, deşi are tot constanta 65 la fel cu pătratul magic din pagina anterioară, totuşi, dată fiind aşezarea deosebită a numerelor sale ne oferă elegantul desen, din stânga figurii. Diagrama pătratului magic de mai sus a cărui constantă este 260, este una din cele mai decorative ce se pot obține.

## *12.1 Probleme cu figuri magice*

***205. Joc magic***

În pătratele din figura de mai jos aşezați numerele de la 1 la 19, astfel încât atât pe liniile orizontale, cât şi pe cele verticale, suma să fie 33.



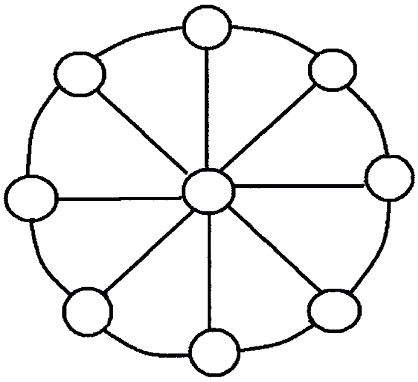
***206. Regruparea magică***

Se dau numerele 2, 4, 6 şi 8, fiecare luat de patru ori. Aceste numere se pot aşeza într-un pătrat magic de 16 pătrățele astfel ca suma lor pe orizontale, pe verticale şi pe ambele diagonale să dea numărul 20.

Ştiți cum?

### *207. Circumferința magică*

Aşezați unul din numerele de la 1 la 9 în centrul circumferinței din figură, iar restul de opt la intersecția celor patru diametre cu această circumferință, dar nu oricum! Urmăriți ca suma celor trei numere de pe flecare diametru să fie totdeauna 15.0 circumferință magică.



### *208. Un pătrat magic*

Cele şapte numere cuprinse între 1 şi 7 se pot aşeza într-un pătrat cu 7 x 7 = 49 pătrățele astfel ca suma lor pe orizontale, pe verticale şi pe diagonale să fie 28. încercați, şi veți vedea!

### *209. Triunghiul magic*

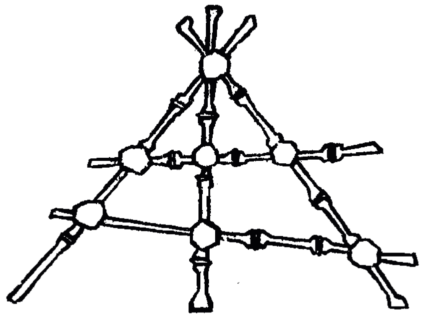
Aşezați cifrele de la 1 la 9 pe laturile unui triunghi, echilateral astfel ca:
- pe fiecare latură să fie câte patru numere;
- aceste numere să nu se repete;
- suma lor pe fiecare latură să fie 17.

### *210. Încă un triunghi magic*

Cifrele de la 1 la 9 se pot aşeza pe laturile unui triunghi, astfel ca:
- pe fiecare latură să fie patru numere;
- suma lor pe fiecare latură să fie 20. Arătați cum!

### *211. Intersecțiile magice*

În punctele de intersecție ale bastoanelor din figura următoare se poate aşeza câte un număr din şirul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 astfel ca suma lor după fiecare dreaptă să dea numărul 12?



***212. Un pătrat magic obținut dintr-un alt pătrat magic***

Iată două pătrate magice. Primul are constanta 15, iar al doilea 57. Puteți să arătați cum se poate obține, al doilea pătrat magic din primul?

| | | |
|---|---|---|
| *8* | *3* | *4* |
| *1* | *5* | *9* |
| *6* | *7* | *2* |

| | | |
|---|---|---|
| *29* | *10* | *18* |
| *8* | *19* | *30* |
| *20* | *28* | *9* |

***213. Un pătrat magic incomplet***

În figura de mai jos avem un pătrat magic cu 8 termeni lipsă. Ştim însă că toți termenii acestui pătrat fac parte din şirul natural al numerelor de la 1 la 16, iar constanta lui este 34. Să încercăm să reconstituim pătratul magic.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *12* | *3* | |
| *10* | | | *1* |
| | *9* | *2* | |
| *4* | | | *11* |